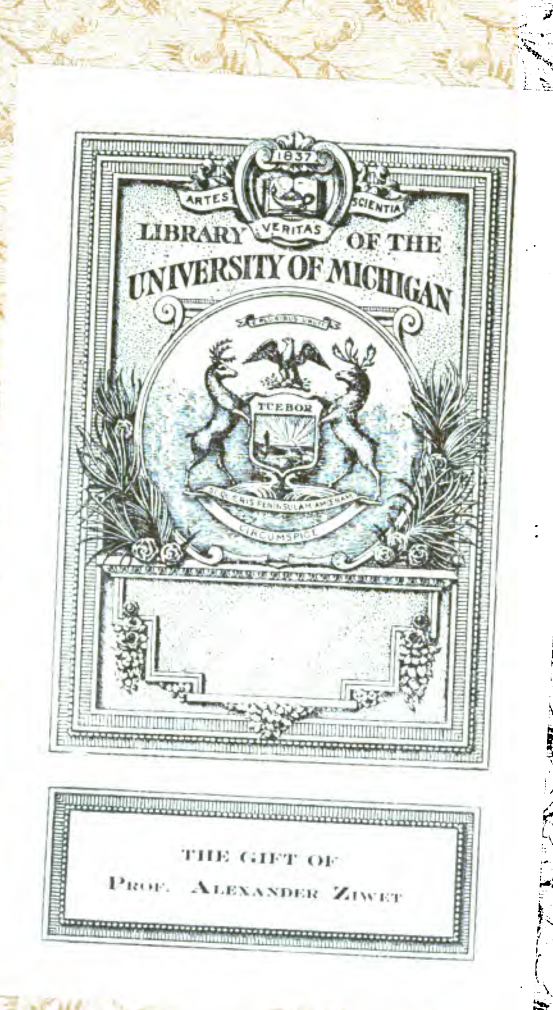
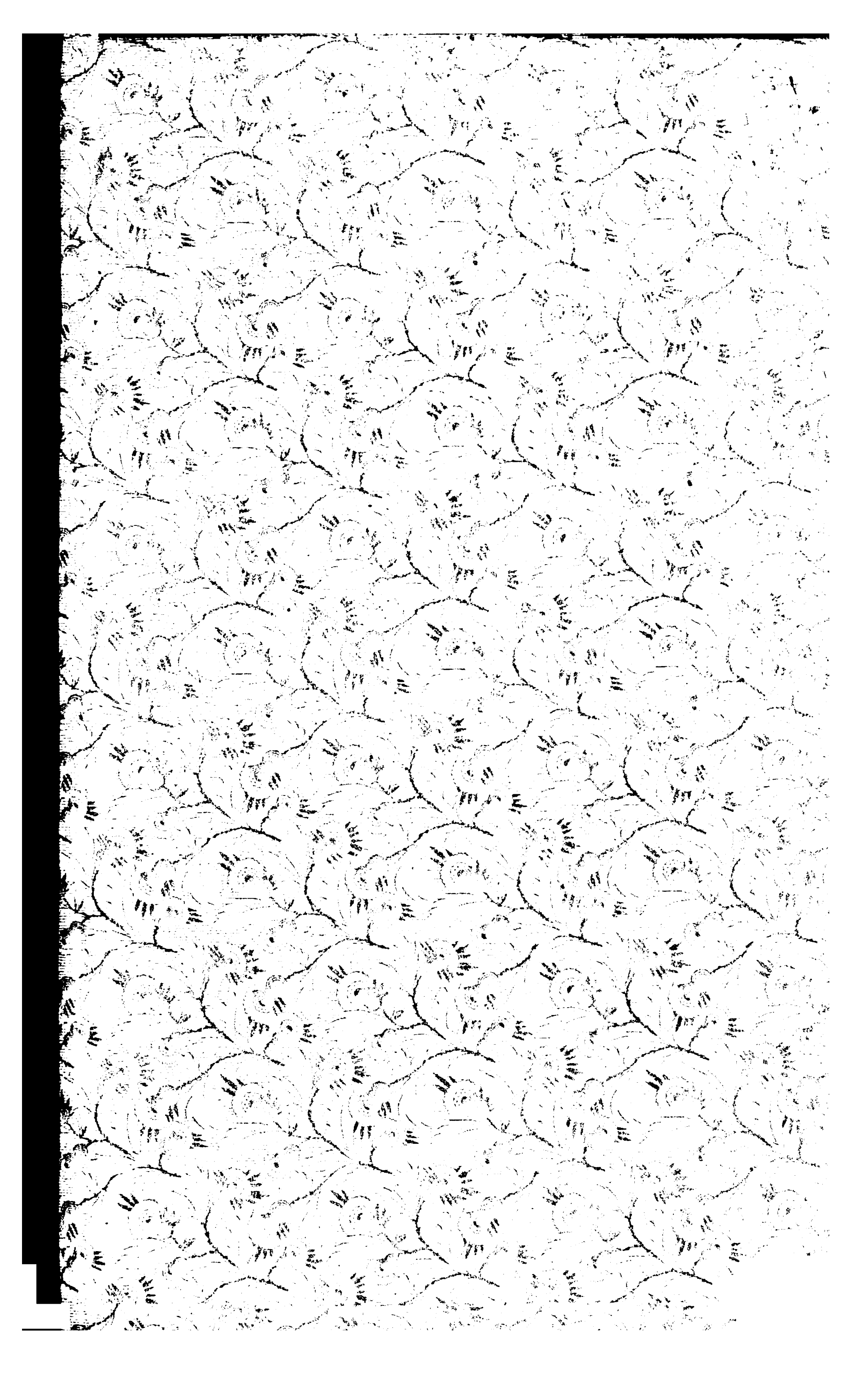

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

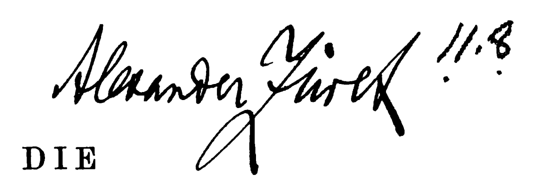






DIE

THEORIE DES SCHALLES.



DIE

THEORIE DES SCHALLES

VON

J. W. STRUTT, BARON RAYLEIGH, M. A., F. R. S.

Früher Fellow of Trinity College, Cambridge.

AUTORISIRTE DEUTSCHE AUSGABE.

ÜBERSETZT

VON

DR. FR. NEESEN,

Professor der Physik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule zu Berlin und Privatdocent an der Universität Berlin.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ZWEITER BAND.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1880.

Theorie des Schalles.

Vol. 1.

„Der Autor wird sich im höchsten Grade den Dank aller derjenigen verdienen, welche Physik und Mathematik studiren, wenn er das Werk in der nämlichen Weise fortsetzt, in welcher er dasselbe in dem ersten Bande begonnen hat... Der Autor hat es durch eine sehr zweckmässige systematische Anordnung des Ganzen für die schwierigsten Probleme der Akustik möglich gemacht, dass dieselben jetzt mit viel grösserer Leichtigkeit wie früher studirt werden.“ —

Prof. Helmholtz in „Nature“.

„Wir sehen mit dem grössten Interesse dem Erscheinen der folgenden Bände entgegen, welchen der vorliegende den Weg bereitet. Das höhere Studium der Akustik wird eine völlig andere Sache sein, wenn jene in unseren Händen sind.“ —

Academy.



INHALTSVERZEICHNISS.

Elftes Capitel.

§§. 236 bis 254. Luftschwingungen. Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen. Bewegungsgleichungen. Continuitätsgleichung. Specielle Form für ein incompressibles Fluidum. Bewegung in zwei Dimensionen. Strömungsfunction. Symmetrie um eine Axe. Geschwindigkeitspotential. Theorem von Lagrange. Beweis von Stokes. Physikalische Interpretation. Untersuchung von Thomson. Circulation. Continuitätsgleichung in Werthen des Geschwindigkeitspotentiales. Ausdruck in Polarcoordinaten. Die Bewegung eines incompressiblen Fluidums in einfach zusammenhängenden Räumen wird durch die Grenzbedingungen bestimmt. Ausdehnung auf vielfach zusammenhängende Räume. Eine Kugel von sich rotationslos bewegendem Fluidum, die plötzlich erstarrt, hat keine Rotation. Rotationslose Bewegung besitzt die kleinstmögliche Energie. Analogie mit den Theorien der Wärme und der Elektricität. Druckgleichung. Allgemeine Gleichung für Schallbewegung. Bewegung in einer Dimension. Positive und negative fortschreitende Wellen. Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Verdichtung. Harmonischer Typus. Fortgeführte Energie. Die Hälfte der Energie ist potentiell und die andere Hälfte kinetisch. Newton's Berechnung der Schallgeschwindigkeit. Laplace's Correction. Ausdruck der Geschwindigkeit in Werthen des Verhältnisses der specifischen Wärmen. Versuch von Clement und Desormes. Rankine's Berechnung aus dem Joule'schen Aequivalente. Mögliche Wirkung der Strahlung. Stokes' Untersuchung. Rasche Dämpfung des Schalles. Es ergiebt sich, dass Mittheilung von Wärme in Praxis keinen merklichen Einfluss hat. Geschwindigkeit abhängig von der Temperatur. Veränderlichkeit der Tonhöhen von Orgelpfeifen. Schallgeschwindigkeit im Wasser. Genaue Differentialgleichung

für ebene Wellen. Anwendung der Theorie stationärer Bewegung auf Wellen. Nur unter einer einzigen Voraussetzung über das Gesetz, welches Druck und Dichte verbindet, kann eine Welle ihre Form ohne Beihülfe einer äusseren Kraft aufrecht halten. Erklärung der Aenderung des Typus. Gleichung von Poisson. Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Verdichtung bei einer fortschreitenden Welle von endlicher Amplitude. Schwierigkeit der schliesslichen Discontinuität. Earnshaw's Integrale. Untersuchungsmethode von Riemann. Begrenzte Anfangsstörung. Experimentelle Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit.

Zwölftes Capitel.

§§. 255 bis 266. Schwingungen in Pfeifen. Allgemeine Form der einfach harmonischen Schwingungsart. Knoten und Bäuche. Bedingung für ein offenes Ende. Bei stationären Schwingungen müssen Knoten in den Intervallen von $\frac{1}{2}\lambda$ vorhanden sein. Reflexion von Pulsschlägen an geschlossenen und offenen Enden. Problem für zusammengesetzte Schwingungen. Von äusseren Quellen herrührende Schwingung in einer Pfeife. Beide Enden offen. Fortschreitende Welle, welche von einer Störung am offenen Ende herrührt. Bewegung, welche in der Pfeife selbst entsteht. Erzwungene Bewegung eines Kolben. Versuche von Kundt. Zusammenstellung der Resultate. Schwingungen der Luftsäule in einer Orgelpfeife. Beziehung zwischen Wellenlänge und Länge der Pfeife. Obertöne. Die Schwingungszahl einer Orgelpfeife hängt von der Art des Gases ab. Vergleichung der Schallgeschwindigkeiten bei verschiedenen Gasen. Untersuchung der schwingenden Luftsäule mittelst Membran und Sand. Durch die König'schen Flammen. Gekrümmte Pfeifen. Verzweigte Pfeifen. Bedingungen, welche an den Verbindungsstellen zusammenhängender Pfeifen erfüllt werden müssen. Veränderlicher Querschnitt. Annähernde Berechnung der Tonhöhe für Pfeifen mit veränderlichem Querschnitt. Einfluss der Veränderlichkeit des Querschnittes auf fortschreitende Wellen. Veränderlichkeit der Dichte.

Dreizehntes Capitel.

§§. 267 bis 272. Luftschwingungen in einem rechtwinkligen Raume. Cubischer Kasten. Resonanz von Zimmern. Rechtwinklige Röhre. Zusammensetzung von zwei gleichen Wellenzügen. Reflexion an einer starren ebenen Wand. Green's Untersuchung über die Re-

flexion und Brechung von ebenen Wellen an einer ebenen Fläche. Sinusgesetz. Fall von Luft und Wasser. Beide Medien gasförmig. Fresnel's Ausdruck. Reflexion an der Trennungsfläche von Luft und Wasserstoff. Reflexion durch warme Luft. Tyndall's Versuche. Totale Reflexion. Reflexion von einer Platte von endlicher Dicke.

Vierzehntes Capitel.

§§. 273 bis 295. Willkürliche Anfangsstörung in einer unbegrenzten Atmosphäre. Lösung von Poisson. Verificirung. Begrenzte Anfangsstörung. Fall von zwei Dimensionen. Ableitung der Lösung für eine beständig erneute Störung. Schallquellen. Harmonischer Typus. Verification der Lösung. Quellen, die über einer Fläche vertheilt sind. Unendliche ebene Wand. Fläche von Doppelquellen. Wellen nach drei Dimensionen, die symmetrisch um einen Punkt sind. Harmonischer Typus. Eine verdichtete oder verdünnte Welle kann nicht allein vorhanden sein. Continuität durch den Pol. Anfangszustände. Geschwindigkeitspotential einer gegebenen Quelle. Berechnung der ausgesandten Energie. Sprachrohr. Theorie von conischen Pfeifen. Lage der Knoten. Zusammensetzung der Schwingungen aus zwei einfachen Quellen von gleicher Höhe. Interferenz der Schalle von auf elektrischem Wege in Schwingung erhaltenen Stimmgabeln. Orte der Stille. Das Vorhandensein von Orten der Stille lässt sich oft aus Symmetriegründen schliessen. Fall einer Glocke. Experimentelle Methoden. Versuch von Mayer. Schallschatten. Oeffnung in einem ebenen Schirme. Die Huyghens'schen Zonen. Allgemeine Erklärung der Schatten. Geneigter Schirm. Bedingungen der annähernd vollständigen Reflexion. Divergirende Wellen. Veränderlichkeit der Intensität. Brennpunkte. Reflexion an gekrümmten Flächen. Elliptische und parabolische Reflectoren. Princip von Fermat. Seufzergallerien. Beobachtungen in der St.-Pauls-Kirche. Wahrscheinliche Erklärung. Resonanz in Gebäuden. Atmosphärische Brechung des Schalles. Fortführungsgleichgewicht der Temperatur. Differentialgleichung für den Weg des Strahles. Brechung des Schalles durch Wind. Erklärung von Stokes. Gesetz der Brechung. Totale Reflexion an oberen Windströmungen. Bei der Brechung durch Wind ist der Verlauf eines Schallstrahles nicht umkehrbar. Beobachtungen von Reynolds. Tyndall's Beobachtungen an Nebelsignalen. Gesetz der Divergenz des Schalles. Sprachrohr. Beugung des Schalles durch eine enge Oeffnung in einem unendlichen Schirme. Ausdehnung des Green'schen Satzes auf Geschwindigkeitspotentiale. Helmholtz's Reciprocitätsgesetz. Anwendung

auf Doppelquellen. Veränderlichkeit der totalen Energie innerhalb einer geschlossenen Kugel.

Funfzehntes Capitel.

§§. 296 bis 302. Secundäre Wellen, welche von einer Variation in dem Medium herrühren. Die relative Wichtigkeit der secundären Wellen hängt von der Wellenlänge ab. Ein Bereich von geänderter Compressibilität wirkt wie eine einfache Quelle, ein Bereich von geänderter Dichte wie eine Doppelquelle. Das Gesetz der umgekehrten vierten Potenzen aus der Methode der Dimensionen gefolgert. Erklärung der harmonischen Echos. Aenderung des Charakters von zusammengesetzten Schallen. Secundäre Wellen, welche von übermässig grosser Amplitude herrühren. Aenderung der Tonhöhe durch die relative Bewegung von Quelle und Empfänger. Experimentelle Illustration des Doppler'schen Principes. Bewegung einer einfachen Quelle. Schwingungen in einem rechtwinkligen Raume, welche von inneren Quellen herrühren. Einfache Quelle, gelegen in einer unbegrenzten Röhre. Ausgesandte Energie. Vergleichung mit conischen Pfeifen. Weitere Besprechung der Bewegung. Berechnung der Reaction der Luft auf eine schwingende kreisförmige Platte, deren Ebene durch einen festen seitlichen Rand vervollständigt ist. Bewegungsgleichung für die Platte. Fall der Coincidenz der natürlichen und erzwungenen Perioden.

Sechszehntes Capitel.

§§. 303 bis 322. Theorie der Resonatoren. Resonator, der aus einem Kolben und einem Luftreservoir zusammengesetzt ist. Potentielle Energie der Zusammendrückung. Schwingungsdauer. In einer grossen Classe der Luftresonatoren ist die Zusammendrückung im ganzen Reservoir gleichförmig, und die kinetische Energie merklich auf die Nachbarschaft der Luftdurchgänge beschränkt. Ausdruck für die kinetische Energie der Bewegung durch Durchgänge in Werthen der elektrischen Leitungsfähigkeit. Berechnung der natürlichen Tonhöhe. Fall von verschiedenen Canälen. Obere und untere Grenze für die Leitungsfähigkeit von Canälen. Einfache Oeffnungen. Elliptische Oeffnung. Vergleichung mit kreisförmiger Oeffnung von gleichem Flächeninhalt. In manchen Fällen genügt eine auf den Flächeninhalt gegründete Berechnung. Obere und untere Grenzen für die Leitungsfähigkeit von Hälsen. Correction für die Länge des Durchganges wegen des offenen Endes. Leitungsfähigkeit von Durchgängen, welche von nahezu cylindrischen Umdre-

hungsflächen begrenzt sind. Vergleichung der berechneten und beobachteten Tonhöhe. Vielfache Resonanz. Berechnung der Perioden für Doppelresonatoren. Mittheilung der Energie an die äussere Atmosphäre. Grösse der Zerstreuung. Numerisches Beispiel. Erzwungene Schwingungen, welche von einer äusseren Quelle herrühren. Helmholtz's Theorie der offenen Pfeifen. Correction für die Länge. Grösse der Zerstreuung. Einfluss eines seitlichen Randes. Experimentelle Methode zur Bestimmung der Tonhöhe von Resonatoren. Besprechung der Bewegung, welche in einer offenen Pfeife entsteht. Bewegung, welche von äusseren Quellen herrührt. Wirkung der Verbreiterung eines geschlossenen Endes. Absorption des Schalles durch Resonatoren. Quincke's Pfeifen. Wirkungsweise eines Resonators in der Nähe einer Schallquelle. Verstärkung des Schalles durch Resonatoren. Idealer Resonator. Wirkungsweise eines Resonators in der Nähe einer Doppelquelle. Savart's Versuch. Zwei oder mehr Resonatoren. Frage nach der Bildung von Wellen während der Schallbewegungen.

Siebzehntes Capitel.

§§. 323 bis 335. Anwendungen der Laplace'schen Functionen (Kugelfunctionen) auf akustische Probleme. Allgemeine Lösung, welche das Glied $n$ter Ordnung enthält. Ausdruck für radiale Geschwindigkeit. Divergirende Wellen. Ursprung auf einer kugelförmigen Fläche. Die Bildung von Schallwellen erfordert im Allgemeinen einen gewissen Flächeninhalt der sich bewegenden Fläche; sonst werden die mechanischen Bedingungen durch einen localen Transport von Luft ohne bemerkenswerthe Verdichtung oder Verdünnung erfüllt. Stokes' Besprechung der Wirkung der seitlichen Bewegung. Versuch von Leslie. Berechnung der numerischen Resultate. Das Glied von der Ordnung Null ist gewöhnlich unbedeutend, wenn der Schall in der Schwingung eines festen Körpers entsteht. Reaction der umgebenden Luft auf eine starre schwingende Kugel. Anwachsen der wirksamen Energie. Wenn die Kugel klein im Vergleich zu der Wellenlänge ist, tritt nur geringe Mittheilung von Energie ein. Schwingung eines Ellipsoides. Vielfache Quellen. In dem Falle der Symmetrie reduciren sich die Laplace'schen Functionen auf die Legendre'schen Functionen. Berechnung der Energie, welche von einer schwingenden kugelförmigen Fläche ausgesandt wird. Fall, wo die Störung auf einen kleinen Theil der kugelförmigen Fläche beschränkt ist. Numerische Resultate. Wirkung einer kleinen Kugel, welche nahe einer Schallquelle liegt. Analytische Transformationen. Fall von Conti-

nuität durch den Pol. Analytische Ausdrücke für das Geschwindigkeitspotential. Ausdruck in Werthen der Bessel'schen Functionen von gebrochener Ordnung. Particuläre Fälle. Schwingungen eines Gases, das in einer starren sphärischen Hülle eingeschlossen ist. Radiale Schwingungen. Diametrale Schwingungen. Schwingungen, welche durch eine Laplace'sche Function von der zweiten Ordnung ausgedrückt werden. Tabelle der Wellenlängen. Relative Tonhöhe der verschiedenen Töne. Allgemeine Bewegung, ausdrückbar durch einfache Schwingungen. Fall von gleichförmiger Anfangsgeschwindigkeit. Schwingungen eines zwischen concentrische kugelförmige Flächen eingeschlossenen Gases. Kugelförmige Gasschalen. Untersuchung der Störung, welche hervorgerufen wird, wenn ebene Schallwellen auf ein kugelförmiges Hinderniss stossen. Entwickelung des Geschwindigkeitspotentiales von ebenen Wellen. Feste und starre Kugel. Intensität von secundären Wellen. Primäre Wellen, welche in einer Quelle in endlicher Entfernung entstehen. Symmetrischer Ausdruck für secundäre Wellen. Fall eines gasförmigen Hindernisses. Gleiche Zusammendrückbarkeiten.

Achtzehntes Capitel.

§§. 336 bis 343. Problem einer kugelförmigen Luftschicht. Entwickelung des Geschwindigkeitspotentiales nach der Fourier'schen Reihe. Differentialgleichung, welche von jedem Gliede zu erfüllen ist. Ausdruck in Werthen von μ und ν. Lösung für den Fall von Symmetrie. Zu erfüllende Bedingungen, wenn die Pole keine Quellen sind. Reduction der Legendre'schen Functionen. Conjugirte Eigenschaft. Uebergang von der kugelförmigen zur ebenen Schicht. Bessel's Function von der Ordnung Null. Kugelförmige Schicht, welche durch Breitenparallelen begrenzt wird. Lösung für eine kugelförmige Schicht, welche von einem kleinen Kreise begrenzt ist. Particuläre Fälle, welche sich durch Legendre'sche Functionen lösen lassen. Allgemeines Problem für unsymmetrische Bewegung. Uebergang zu zwei Dimensionen. Vollständige Lösung für eine ganze Kugel in Werthen der Laplace'schen Functionen. Entwickelung einer willkürlichen Function. Differentialquotientenformel. Entsprechende Formel in den Bessel'schen Functionen für zwei Dimensionen. Unabhängige Untersuchung des Problemes für eine Ebene. Transversale Schwingungen in einer cylindrischen Hülle. Fall von gleichförmiger Anfangsgeschwindigkeit. Durch feste Wände begrenzter Sector. Anwendung auf Wasserwellen. Schwingungen, nicht nothwendig transversale, innerhalb eines kreisförmigen Cylinders mit ebenen Enden. Vollständige Lösung der Differentialgleichung

ohne Beschränkung in Betreff der Abwesenheit einer polaren Quelle. Differentialquotientenformel. Ausdruck des Geschwindigkeitspotentiales durch absteigende halbconvergente Reihen. Fall von rein divergirenden Wellen. Stokes' Anwendung auf schwingende Saiten. Wichtigkeit von Schallbrettern. Verhütung von seitlicher Bewegung. Geschwindigkeitspotential einer linearen Quelle. Bedeutung der Verzögerung um $\frac{1}{8}\lambda$. Problem von Wellen, welche auf ein cylindrisches Hinderniss stossen. Fester und starrer Cylinder. Mathematisch analoge Probleme, welche sich auf die transversalen Schwingungen eines elastischen festen Körpers beziehen. Anwendung auf die Theorie des Lichtes. Tyndall's Versuche, welche die Kleinheit des durch Gewebe, deren Poren offen sind, dem Schalle entgegengesetzten Hindernisses zeigen.

Neunzehntes Capitel.

§§. 344 bis 348. Reibung eines Fluidums. Natur der Zähigkeit. Zähigkeitscoefficient. Unabhängigkeit desselben von der Dichte des Gases. Maxwell's Versuche. Vergleichung der Gleichungen für zähe Bewegung mit denen, welche für einen elastischen festen Körper gelten. Annahme, dass einer Bewegung von gleichförmiger Ausdehnung oder Zusammenziehung zähe Kräfte nicht widerstehen. Stokes' Ausdruck für die Zerstreuungsfunction. Anwendung auf die Theorie von ebenen Wellen. Allmälige Abschwächung von harmonischen Wellen, welche im Ursprunge aufrecht erhalten werden. Bis zu einer ersten Annäherung wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die Zähigkeit nicht beeinflusst. Numerische Berechnung des Abschwächungscoefficienten. Die Wirkung der Zähigkeit bei atmosphärischem Drucke ist nur für hohe Klänge merkbar. Ein Zischen wird in einer mässigen Entfernung von der Quelle unhörbar. In verdünnter Luft wird der Einfluss der Zähigkeit sehr vergrössert. Transversale Schwingungen, welche von Zähigkeit herrühren. Anwendung auf Berechnung der Wirkungen der Zähigkeit auf Schwingungen in engen Röhren. Helmholtz's und Kirchhoff's Resultate. Beobachtungen von Schneebeli und Seebeck. Princip der dynamischen Aehnlichkeit. Theorie von Schiffen und deren Modellen. Anwendung des Principes der Aehnlichkeit auf elastische Platten.

Zusatz A.

Correction für ein offenes Ende . . . . Seite 375
Note zu §. 273 . . . . „ 384
Note über fortschreitende Wellen . . . . „ 385

Elftes Capitel.

Schwingungen der Luft.

236. Da in den meisten Fällen die Atmosphäre der Träger des Schalles ist, so hat man die Untersuchung der Schwingungen eines gasförmigen Mediums stets als das eigentliche Problem der physikalischen Akustik angesehen. Indessen sind hier, abgesehen von wenigen speciell einfachen Problemen, die mathematischen Schwierigkeiten der Art, dass man bis jetzt nur geringe Fortschritte gemacht hat. Selbst wenn theoretisch ein Resultat errungen ist, kommt es oft vor, dass dasselbe der Probe des Versuches nicht unterworfen werden kann, weil genaue Methoden, um die Intensität der Schwingungen zu messen, fehlen. An manchen Stellen besteht Alles, was wir thun können, darin, dass wir diejenigen Probleme lösen, deren mathematische Bedingungen hinreichend einfach sind, um eine Lösung zuzulassen; dass wir dann darauf trauen, dass diese und allgemeine Principien uns nicht ganz auch bei anderen Fragen, welche unser Interesse erwecken können, im Dunkeln lassen.

In diesem Capitel wollen wir die Fluida als vollkommen ansehen, d. h. wir wollen annehmen, dass die gegenseitige Einwirkung zwischen zwei durch eine ideale Fläche getrennten Theilen senkrecht zu dieser Fläche steht. Später werden wir dann etwas über die Reibung in Fluidis hinzufügen. Indessen werden im Allgemeinen die akustischen Erscheinungen

durch eine solche Abweichung von den Eigenschaften eines vollkommenen Fluidums, wie sie bei der Luft und anderen Gasen auftritt, nicht wesentlich gestört.

Die Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen um einen Punkt herum ist nothwendige Folge der Eigenschaften eines vollkommenen Fluidums, dasselbe mag nun in Ruhe oder in Bewegung sein. Es lässt sich diese Gleichheit beweisen, indem man das Gleichgewicht eines kleinen Tetraeders unter der Wirkung der Drucke des Fluidums, der äusseren Kräfte und der Reactionen gegen Beschleunigung untersucht. Geht man zu Grenzbetrachtungen über, d. h. nimmt man das Tetraeder unendlich klein, so werden die Drucke des Fluidums auf die Seiten des Tetraeders überwiegend, und das Gleichgewicht erfordert, dass die ganze Grösse dieses Druckes proportional dem Flächeninhalt der Seiten ist, auf welche jene wirken. Den Druck im Punkte x, y, z wollen wir mit p bezeichnen.

237. Bezeichnen $\varrho X d V$, $\varrho Y d V$, $\varrho Z d V$ die äusseren Kräfte, welche auf das Massenelement $\varrho\, d V$ wirken, so wird die Gleichgewichtsgleichung:

$$dp = \varrho\,(X dx + Y dy + Z dz),$$

worin dp die den Aenderungen dx, dy, dz der Coordinaten des Angriffspunktes des Druckes entsprechende Variation des letzteren bezeichnet. Man leitet diese Gleichung leicht ab, wenn man das Gleichgewicht eines Cylinders mit ebenen Endflächen betrachtet, für welchen die Projection seiner Axe auf die Coordinatenaxen resp. dx, dy, dz sind. Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, haben wir nur nach dem d'Alembert-schen Princip X etc. durch $X - \frac{Du}{Dt}$ etc. zu ersetzen, worin $\frac{Du}{Dt}$ etc. die Beschleunigungen des betrachteten Fluidumtheilchens bedeuten. Daher ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= \varrho\left(X - \frac{Du}{Dt}\right)\\ \frac{dp}{dy} &= \varrho\left(Y - \frac{Dv}{Dt}\right)\\ \frac{dp}{dz} &= \varrho\left(Z - \frac{Dw}{Dt}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Bei hydrodynamischen Untersuchungen ist es gebräuchlich, die Geschwindigkeiten des Fluidums u, v, w in Werthen von x, y, z und t auszudrücken. Diese Ausdrücke bedeuten dann die Geschwindigkeiten desjenigen Theilchens, gleichgültig, welches es ist, das sich zur Zeit t gerade im Punkte x, y, z befindet. Nach Verlauf eines kleinen Zeitelementes dt hat ein neues Theilchen den Punkt x, y, z erreicht; $\frac{du}{dt}\, dt$ bezeichnet den Ueberschuss der Geschwindigkeit dieses Theilchens über die des ersten Theilchens, während andererseits $\frac{Du}{Dt}\, dt$ die Aenderung in der Geschwindigkeit des ursprünglichen Theilchens während derselben Zeit bedeutet oder, was dasselbe ist, die Geschwindigkeitsänderung eines Punktes, der nicht fest im Raume ist, sondern sich mit dem Fluidum fortpflanzt. Bei dieser Bezeichnungsweise wollen wir bleiben. Bei der durch $\frac{d}{dt}$ ausgedrückten Aenderung bleibt die Lage im Raume (die durch die Werthe von x, y, z ausgedrückt wird) fest, während $\frac{D.}{Dt}$ zu einem bestimmten Theilchen des Fluidums gehört, auf welches wir gerade unsere Aufmerksamkeit richten. Die Beziehung zwischen den beiden Arten von Differentiation in Bezug auf die Zeit wird ausgedrückt durch:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + u\frac{d}{dx} + v\frac{d}{dy} + w\frac{d}{dz} \quad \ldots\ldots (2);$$

sie muss genau verstanden und beachtet werden, wenn auch die Unterscheidung zwischen diesen beiden Arten bei einer grossen Classe von wichtigen Problemen, mit denen wir in dem Folgenden zu thun haben werden, praktisch verschwindet.

Die relative Bedeutung der Glieder $u \frac{d}{dx}$ etc. verschwindet immer dort, wo die Bewegung sehr klein ist, und schliesslich ist $\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt}$.

238. Wir haben weiter die Bedingung dafür auszudrücken, dass im Inneren des Fluidums Materie weder erzeugt wird noch verschwindet. Sind α, β, γ die parallel den Coordinatenaxen gehenden Kanten eines kleinen rechtwinkligen Parallelopipedon, so ist die Menge von Materie, welche in der Zeit dt mehr aus dem Parallelopipedon heraus- wie hineingeht:

$$\left\{\frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d(\varrho v)}{dy} + \frac{d(\varrho w)}{dz}\right\} \alpha\beta\gamma\, dt;$$

das muss nun gleich dem wirklich erlittenen Verluste sein, also gleich:

$$-\frac{d\varrho}{dt}\alpha\beta\gamma\, dt.$$

Daher:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d(\varrho v)}{dy} + \frac{d(\varrho w)}{dz} = 0 \quad . \; . \; . \quad (1),$$

die sogenannte Continuitätsgleichung. Ist ϱ constant (mit Bezug sowohl auf Zeit wie auf Raum), so nimmt die Gleichung folgende einfache Form an:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Bei den akustischen Problemen werden die Geschwindigkeiten und die Aenderung der Dichtigkeit gewöhnlich als kleine Grössen behandelt. Setzen wir $\varrho = \varrho_0 (1 + s)$, worin s, Verdichtung genannt, klein ist und vernachlässigen die Producte $u \frac{ds}{dx}$ etc., so finden wir:

$$\frac{ds}{dt} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

In speciellen Fällen nimmt diese Gleichung noch einfachere Formen an. Bei einem incompressibeln Fluidum, dessen Bewegung ganz parallel der xy-Ebene ist, wird sie:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

woraus wir schliessen, dass der Ausdruck $u\,dy - v\,dx$ ein vollkommenes Differential ist. Nennen wir dasselbe $d\psi$, so haben wir als Aequivalent von (4):

$$u = \frac{d\psi}{dy}, \quad v = -\frac{d\psi}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

worin ψ eine Function der Coordinaten, welche soweit ganz willkürlich ist. Die Function ψ wird die Strömungsfunction genannt, da die Bewegung des Fluidums überall in der Richtung der Curven $\psi =$ Constans vor sich geht. Ist die Bewegung stationär, das heisst stets an demselben Punkte des Raumes dieselbe, so schneiden die Curven $\psi =$ Constans ein System von Röhren oder Canälen aus, in denen man das Fluidum sich fortfliessend denken kann. Analytisch ist die Einsetzung einer Function ψ für die zwei Functionen u und v oft ein Schritt von weittragender Folge.

Ein anderer wichtiger Fall ist der, wo rund um eine Axe, z. B. die der x, Symmetrie herrscht. Jedes Ding ist dann in Werthen von x und r ausdrückbar, wo $r = \sqrt{y^2 + z^2}$; die Bewegung findet statt in Ebenen, welche durch die Symmetrieaxe hindurchgehen. Sind die Geschwindigkeiten, resp. parallel und senkrecht zu der Symmetrieaxe, u und q, so lautet die Continuitätsgleichung:

$$\frac{d(ru)}{dx} + \frac{d(rq)}{dr} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

welche, wie vorher, äquivalent ist dem folgenden Gleichungssystem:

$$ru = \frac{d\psi}{dr}, \quad rq = -\frac{d\psi}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

worin ψ die Strömungsfunction ist.

239. In beinahe allen den Fällen, mit welchen wir zu thun haben werden, erfahren die hydrodynamischen Gleichungen eine bemerkenswerthe Vereinfachung kraft eines zuerst von

Lagrange aufgestellten Satzes. Wenn zu irgend einem Moment $u dx + v dy + w dz$ für irgend einen Theil eines Fluidums ein vollständiges Differential $d\varphi$ ist, so bleibt dieser Ausdruck ein vollständiges Differential auch für alle folgende Zeiten. Specieller, wenn das Fluidum ursprünglich in Ruhe ist und dann durch conservative Kräfte und Drucke, die von aussen her wirken, in Bewegung gesetzt wird, so können die Ausdrücke:

$$\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}, \ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}, \ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}$$

(welche wir mit ξ, η, ζ bezeichnen wollen) nie von Null verschieden sein.

Wir nehmen an, es sei ϱ eine Function von p und schreiben der Kürze halber:

$$\varpi = \int \frac{dp}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Die aus (1), (2), §. 237 erhaltenen Bewegungsgleichungen sind:

$$\frac{d\varpi}{dx} = X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz} \quad . \ . \quad (2),$$

nebst den beiden anderen von derselben Form, die sich auf y und z beziehen. Nach der Annahme ist:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx};$$

so dass wir durch Differentiation der ersten der obigen Gleichungen nach y und der zweiten nach x und durch darauf folgende Subtraction ϖ und die äusseren Kräfte eliminiren. Wir erhalten dann Gleichungen, die in folgende Form gebracht werden können:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{du}{dz}\xi + \frac{dv}{dz}\eta - \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\zeta \ \ldots \ \quad (3),$$

nebst den beiden anderen von derselben Form, welche $\frac{D\xi}{Dt}$, $\frac{D\eta}{Dt}$ geben.

Bei einem incompressibelen Fluidum dürfen wir für $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$

das Aequivalent hierfür, nämlich $-\frac{dw}{dz}$, setzen und erhalten daher:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{du}{dz}\xi + \frac{dv}{dz}\eta + \frac{dw}{dz}\zeta \text{ etc.} \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

welches die von **Helmholtz** als Ausgangspunkt zu seinen Sätzen über Wirbel benutzten Gleichungen sind.

Ist die Bewegung continuirlich, so sind die Coefficienten von ξ, η, ζ in den obigen Gleichungen sämmtlich endlich. Es möge L den grössten numerischen Werth derselben und Ω die Summe der numerischen Werthe von ξ, η, ζ bezeichnen. Nach der gemachten Annahme ist im Anfange Ω gleich Null; die Frage ist nun die, ob Ω im Laufe der Zeit endlich werden kann. Die vorhergehenden Gleichungen zeigen, dass das nicht möglich ist. Denn die Grösse des Anwachsens für ein bestimmtes Theilchen ist zu jeder Zeit kleiner wie $3L\Omega$, wobei alle Grössen als positiv genommen sind. Nun würde aber Ω, selbst wenn sein Wachsthumverhältniss ebenso gross wie $3L\Omega$ wäre, nie endlich werden, wie aus der Lösung der Gleichung:

$$\frac{D\Omega}{Dt} = 3L\Omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

hervorgeht.

Umsomehr kann in dem vorliegenden Falle Ω nicht von Null abweichen; dasselbe muss für ξ, η, ζ richtig sein.

Es ist erwähnenswerth, dass diese Folgerung von der Gegenwart von Reibungskräften, welche auf jedes Theilchen proportional der Geschwindigkeit desselben wirken, nicht beeinflusst wird, wie man leicht sieht, wenn man $X - \varkappa u$, $Y - \varkappa v$, $Z - \varkappa w$ für X, Y, Z in (2) einsetzt[1]). Anders verhält es sich aber mit den Reibungskräften, welche thatsächlich in den Fluidis vorhanden sind und die von der relativen Geschwindigkeit der einzelnen Theile abhängen.

---

[1]) Durch Einführung solcher Kräfte und Vernachlässigung der von der Trägheit abhängigen Glieder erhalten wir Gleichungen, welche auf die Bewegung der Elektricität in gleichförmigen Conductoren anwendbar sind.

Der erste genügende Beweis für das eben besprochene wichtige Problem wurde von Cauchy gegeben; den oben skizzirten verdanken wir aber Stokes[1]). Es reicht nicht hin, nur zu zeigen, dass stets, wenn ξ, η, ζ verschwinden, ihre Differentialquotienten $\frac{D\xi}{Dt}$ etc. ebenso verschwinden; wenn dies auch ein oft übersehener Punkt ist. Fällt ein Körper aus einer Ruhelage unter Einwirkung der Schwere, so ist $\dot{s} \propto s^{\frac{1}{2}}$; indessen folgt nicht, dass s niemals endlich wird. Um diesen Schluss zu rechtfertigen, ist der Nachweis nothwendig, dass s an der Grenze verschwindet, nicht bloss bei Berücksichtigung von Gliedern erster Ordnung der kleinen Grösse t, sondern auch bei Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung; natürlich kann aber dieser Nachweis für einen fallenden Körper nicht beigebracht werden. Wäre indessen die Gleichung: $\dot{s} \propto s$, so würden alle Differentialquotienten von s in Bezug auf t mit t verschwinden, wenn das für s der Fall ist. Dann ist man zu dem Schlusse berechtigt, dass s nie von Null verschieden sein kann.

Nach einem von Stokes herrührenden Theorem sind die Drehungsmomente um die Coordinatenaxen irgend eines unendlich kleinen kugelförmigen Theiles eines Fluidums gleich ξ, η, ζ multiplicirt mit dem Trägheitsmoment der Masse. Daher können diese Grössen als die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit des Fluidums in dem Punkte angesehen werden, auf welchen dieselben sich beziehen.

Verschwinden ξ, η, ζ im ganzen von dem sich bewegenden Fluidum eingenommenen Raume, so würde jedes kleine sphärische Theilchen des Fluidums nur eine Verschiebungsbewegung beibehalten, wenn es plötzlich erstarrte. Ein Beweis für diesen Satz wird in einer allgemeineren Form etwas später gegeben. Lagrange's Satz besteht also in der Behauptung, dass Theilchen eines Fluidums, welche zu irgend einer Zeit keine Rotation besitzen, auch nie eine solche annehmen können.

[1]) Cambridge, Trans. Vol. VIII, p. 307. B. A. Report on Hydrodynamics, 1847.

240. Ein etwas verschiedener Gang bei der Untersuchung dieser Frage ist von Thomson eingeschlagen[1]). Es verbreitet die Schlussweise desselben ein sehr instructives Licht über den ganzen Gegenstand.

Nach der Fundamentalgleichung ist:

$$d\omega = X dx + Y dy + Z dz - \frac{Du}{Dt}dx - \frac{Dv}{Dt}dy - \frac{Dw}{Dt}dz.$$

Nun ist $X dx + Y dy + Z dz = dR$, wenn die Kräfte conservativ sind, und:

$$\frac{Du}{Dt}dx + \frac{Dv}{Dt}dy + \frac{Dw}{Dt}dz$$

$$= \frac{D}{Dt}(u dx + v dy + w dz) - u\frac{D dx}{Dt} - v\frac{D dy}{Dt} - w\frac{D dz}{Dt},$$

worin:

$$\frac{D dx}{Dt} = d\frac{Dx}{Dt} = du \text{ etc.}$$

Daher haben wir, wenn $U^2 = u^2 + v^2 + w^2$:

$$d\omega = dR - \frac{D}{Dt}(u dx + v dy + w dz) + \frac{1}{2}dU^2 \quad . \quad . \quad (1),$$

oder:

$$\frac{D}{Dt}(u dx + v dy + w dz) = d\left(R + \frac{1}{2}U^2 - \omega\right) \quad . \quad . \quad (2).$$

Integriren wir diese Gleichungen längs eines endlichen Bogens $P_1 P_2$, der sich mit dem Fluidum bewegt, so haben wir:

$$\frac{D}{Dt}\int(u dx + v dy + w dz)$$

$$= \left(R + \frac{1}{2}U^2 - \omega\right)_2 - \left(R + \frac{1}{2}U^2 - \omega\right)_1 \quad . \quad . \quad (3),$$

worin die Indices die Werthe der eingeklammerten Functionen resp. in den Punkten P_2 und P_1 bedeuten. Ist der Bogen ein geschlossener Umfang, so ist:

$$\frac{D}{Dt}\int(u dx + v dy + w dz) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

oder in Worten:

---

[1]) Vortex Motion. Edinburgh Transactions 1869.

Das Randintegral der tangentialen Geschwindigkeitscomponente rund um jede geschlossene Curve eines sich bewegenden Fluidums bleibt während aller Zeit constant.

Das in Frage stehende Randintegral nennt man zweckmässig die **Circulation**; der Satz lautet mit diesem Ausdruck:

Die Circulation in jeder geschlossenen sich mit dem Fluidum fortbewegenden Linie bleibt constant.

In einem Ruhezustande ist die Circulation natürlich gleich Null, so dass die Circulation längs einer geschlossenen Linie immer gleich Null bleibt, wenn ein Fluidum durch von aussen wirkende Drucke oder conservative Kräfte in Bewegung gesetzt wird. Es ist deshalb nothwendiger Weise in diesem Falle $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ ein vollständiges Differential.

Es folgt aber nicht umgekehrt, dass bei einer Bewegung ohne Rotation die Circulation stets Null, wenn nicht etwa bekannt sein sollte, dass φ einwerthig ist. Denn sonst braucht $\int d\varphi$ rund um eine geschlossene Curve nicht zu verschwinden. In solch einem Falle können wir nur das behaupten, dass keine Circulation rund um eine Curve vorhanden ist, die sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne dass sie aus dem von dem rotationslosen Fluidum eingenommenen Raume heraustritt, oder allgemeiner, dass die Circulation in allen in einander transformirbaren geschlossenen Curven dieselbe ist. Man nennt zwei Curven in einander transformirbar, wenn die eine aus der anderen durch continuirliche Deformation erhalten werden kann, ohne dass sie aus dem sich ohne Rotation bewegenden Fluidum heraustritt.

Innerhalb eines ovalen Raumes, wie der von einem Ellipsoid eingeschlossene, sind alle geschlossenen Curven in einander transformirbar, und daher kann, wenn eine Fluidummasse von dieser Form sich ohne Rotation bewegt, dort keine Circulation längs irgend einer in dieser Masse gezogenen geschlossenen Curve sein. Solche Räume heissen einfach zusammenhängend. In einem ringförmigen Raume aber, wie der, welcher von der Oberfläche eines Ankerringes begrenzt wird, lässt sich eine

geschlossene Curve, welche rund um den Ring geht, nicht continuirlich auf einen Punkt zusammenziehen, und daher kann dort Circulation längs dieser Curve sein, selbst wenn die Bewegung in dem ganzen eingeschlossenen Volumen ohne Rotation ist. Die Circulation ist aber gleich Null für jede geschlossene Curve, welche nicht rund um den Ring herumgeht, und hat für alle die, welche letzteres thun, denselben constanten Werth.

241. Ist $u dx + v dy + w dz$ ein genaues Differential $d\varphi$, so wird die Geschwindigkeit in jeder Richtung durch die entsprechende Grössenänderung von φ, welche Grösse das Geschwindigkeitspotential heisst, ausgedrückt, und man kann:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dz}{dw}$$

ersetzen durch:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Bezeichnet S eine geschlossene Fläche, so ist die Grösse der Strömung nach aussen durch das Element dS ausgedrückt durch $\frac{d\varphi}{dn} dS$, wo $\frac{d\varphi}{dn}$ die Grösse der Variation von φ beim Vorwärtsschreiten uach aussen längs der Normale ist. Bei einer constanten Dichtigkeit beträgt daher der ganze Verlust an Fluidum in der Zeit dt:

$$\int\int \frac{d\varphi}{dn} dS \,.\, dt,$$

wobei sich die Integration über die ganze Oberfläche von S erstreckt. Ist der Raum S sowohl am Anfang wie am Ende der Zeit dt voll, so muss der Verlust verschwinden, daher:

$$\int\int \frac{d\varphi}{dn} dS = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf das Element $dx\,dy\,dz$ giebt als Continuitätsgleichung einer incompressibeln Flüssigkeit:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

oder, wie es allgemein geschrieben wird:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Wünscht man mit Polarcoordinaten zu rechnen, so wird die transformirte Gleichung direct durch Anwendung der Gleichung (1) auf das entsprechende Volumelement leichter erhalten, als durch Transformation der Gleichung (2) nach den analytischen Regeln für die Aenderung der unabhängigen Variabeln.

Nehmen wir Polarcoordinaten in der xy-Ebene, so dass:

$$x = r \cos\vartheta, \quad y = r \sin\vartheta,$$

so finden wir:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d \varphi}{d r} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{D \vartheta^2} + \frac{d^2 \varphi}{d z^2} \quad \ldots \quad (4);$$

oder, wenn wir Raumpolarcoordinaten nehmen:

$$x = r \sin\vartheta \cos\omega, \quad y = r \sin\vartheta \sin\omega, \quad z = r \cos\vartheta,$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{d r^2} + \frac{2}{r} \frac{d \varphi}{d r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{d s}{d \vartheta} \left(\sin\vartheta \, \frac{d \varphi}{d \vartheta} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{d^2 \varphi}{d \omega^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

In speciellen Fällen, wie z. B. bei einer Symmetrie rund um die z-Axe in (5), nehmen diese Gleichungen einfachere Formen an.

Ist das Fluidum compressibel und die Bewegung der Art, dass die Quadrate von kleinen Grössen vernachlässigt werden können, so wird die Continuitätsgleichung (3) §. 238:

$$\frac{d s}{d t} + \nabla^2 \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

worin jede Form von $\nabla^2 \varphi$, welche die zweckmässigste für das gerade vorliegende Problem ist, gebraucht werden kann.

242. Die rotationslose Bewegung eines incompressibeln Fluidums innerhalb eines einfach zusammenhängenden Raumes S ist durch die Normalgeschwindigkeiten über der Fläche S vollkommen bestimmt. Ist S eine materielle Hülle, so liegt es auf der Hand, dass der Oberfläche eine beliebige Normal-

geschwindigkeit ertheilt werden kann, an welcher Geschwindigkeit sofort das unmittelbar mit der Hülle in Berührung stehende Fluidum theilnehmen muss, vorausgesetzt, dass das ganze eingeschlossene Volumen ungeändert bleibt. Ist das Fluidum vorher in Ruhe, so kann es unter Einwirkung der Drucke im Fluidum keine moleculare Rotation annehmen, ein Beweis dafür, dass es möglich sein muss, eine Function φ von der Eigenschaft zu bestimmen, dass $\nabla^2\varphi = 0$ ist in dem ganzen von S eingeschlossenen Raume, während $\frac{d\varphi}{dn}$ über der Oberfläche einen vorgeschriebenen Werth hat, der nur durch die Bedingung:

$$\int\int\frac{d\varphi}{dn}\,dS = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

beschränkt wird.

Einen analytischen Beweis dieses wichtigen Satzes findet man in Thomson und Tait's theoretischer Physik, §. 317.

Es hat keine Schwierigkeiten zu beweisen, dass nur eine Lösung des Problems möglich ist. Nach dem Green'schen Satze haben wir, wenn $\nabla^2\varphi = 0$:

$$\int\int\int\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right)dV = \int\int\varphi\,\frac{d\varphi}{dn}\,dS \; . \; . \; . \; (2),$$

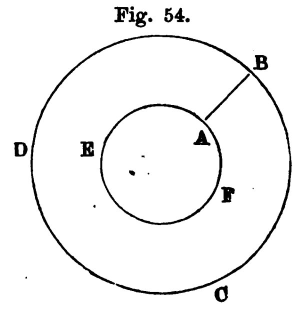
wo sich die Integration auf der linken Seite über das Volumen und die auf der rechten Seite über die Fläche S erstreckt. Sind nun φ und $\varphi + \Delta\varphi$ zwei Functionen, welche die Laplace'sche Gleichung erfüllen, und welche dem Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dn}$ vorgeschriebene Oberflächenwerthe ertheilen, so ist ihre Differenz $\Delta\varphi$ auch eine Function, die der Laplace'schen Gleichung genügt, und die $\frac{d\Delta\varphi}{dn}$ über der Oberfläche S verschwinden lässt. Unter diesen Umständen verschwindet das Doppelintegral in (2); wir schliessen dann, dass in jedem Punkte von S — $\frac{d\Delta\varphi}{dx}$, $\frac{d\Delta\varphi}{dy}$, $\frac{d\Delta\varphi}{dz}$ gleich Null sein müssen.

In anderen Worten: $\Delta \varphi$ muss constant sein und die beiden Bewegungen identisch. Als ein specieller Fall kann innerhalb des Volumens S keine Bewegung von einer rotationslosen Art sein, die unabhängig von der Bewegung der Oberfläche ist. Die Einschränkung auf einfach zusammenhängende Räume wird durch das Versagen des Green'schen Satzes nothwendig gemacht, welches sonst, wie Helmholtz zuerst bemerkte, eintreten kann.

Wenn der Raum S vielfach zusammenhängend ist, so bleibt die rotationslose Bewegung noch bestimmt, wenn ausser der Normalgeschwindigkeit in jedem Punkte von S dort auch die Werthe der constanten Circulation in allen möglichen nicht auf einen Punkt zusammenzuziehenden geschlossenen Curven gegeben sind. Wegen einer vollständigen Besprechung dieser Frage müssen wir auf Thomson's Originalarbeit verweisen und uns hier mit dem Falle eines doppelt zusammenhängenden Raumes begnügen, welcher zur Illustration dieser Fälle hinreichen wird.

Es sei $ABCD$ eine Röhre ohne Ende, in der ein Fluidum sich ohne Rotation bewegt. Für eine solche Bewegung muss ein Geschwindigkeitspotential existiren, dessen Differentialquotienten, die ja die Geschwindigkeitscomponenten ausdrücken, nothwendiger Weise einwerthig sind, während es selbst aber nicht einwerthig zu sein braucht. Der einfachste Weg, die durch den doppelten Werth von φ gebotene Schwierigkeit hinwegzuräumen, ist der, sich quer durch den Ring eine Wand AB zu denken, so dass durch dieselbe der Durchgang gesperrt wird. Der Raum $ABCDBAEF$ ist dann einfach zusammenhängend und der Green'sche Satz lässt sich hierauf ohne eine Modification anwenden, wenn man eine mögliche endliche Differenz in dem Werthe von φ an beiden Seiten der Wand zu-

Fig. 54.



lässt. Diese Differenz ist, wenn sie existirt, nothwendig in allen Punkten von AB dieselbe und drückt bei der hydrodynamischen Anwendung die Circulation rund um den Ring herum aus.

Wenden wir die folgende Gleichung an:

$$\iiint \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right) dV = \iint \varphi \frac{d\varphi}{dn} dS \ldots (2),$$

so haben wir das Doppelintegral ebenso gut über die beiden Flächen der Wand als über die ursprüngliche Oberfläche des Ringes auszurechnen. Da nun $\frac{d\varphi}{dn}$ auf den beiden Seiten der Wand denselben Werth hat, so ist:

$$\iint \varphi \frac{d\varphi}{dn} dS \text{ (über die beiden Flächen von } AB)$$

$$= \iint \frac{d\varphi}{dn} \varkappa dS = \varkappa \iint \frac{d\varphi}{dn} dS,$$

wenn $\varkappa$ die constante Differenz von φ bedeutet. Daher schliessen wir, ebenso wie in einem einfach zusammenhängenden Raume, dass φ, wenn $\varkappa$ verschwindet, d. i. wenn keine Circulation rund um den Ring stattfindet, vollständig durch die Oberflächenwerthe von $\frac{d\varphi}{dn}$ bestimmt ist. Findet Circulation statt, so bleibt φ noch bestimmt, wenn die Grösse der Circulation gegeben ist. Denn wenn φ und $\varphi + \triangle\varphi$ zwei Functionen sind, welche die Laplace'sche Gleichung erfüllen und dieselbe Grösse der Circulation und dieselben Normalgeschwindigkeiten in S geben, so genügt auch ihre Differenz der Laplace'schen Gleichung und der Bedingung, dass auf S weder Circulation noch Normalgeschwindigkeiten vorhanden sind. Unter solchen Umständen verschwindet aber $\triangle\varphi$, wie wir eben gesehen haben, in jedem Punkte.

Wenn auch in einem doppelt zusammenhängenden Raume rotationslose Bewegung unabhängig von Oberflächennormalgeschwindigkeiten möglich ist, so kann doch eine solche Bewegung nicht durch conservative Kräfte oder durch der Be-

grenzungsfläche (zu irgend einer früheren Zeit) auferlegte Bewegungen erzeugt werden. Denn wir haben bewiesen, dass, wenn das Fluidum ursprünglich in Ruhe ist, dann nie eine Circulation längs irgend welcher geschlossenen Curve vorhanden sein kann. Daher kommt ebenso gut in einem mehrfach zusammenhängenden wie in einem einfach zusammenhängenden Raume die ganze Masse, wenn das Fluidum durch beliebige Deformation der Begrenzung in Bewegung gesetzt ist, sofort zu Ruhe, so wie die Bewegung der Begrenzungsfläche aufhört.

Wenn in einem sich ohne Circulation bewegenden Fluidum alles Fluidum ausserhalb einer in sich zurückkehrenden röhrenförmigen Fläche von gleichförmigem Querschnitt plötzlich erstarrt, so kommt in demselben Moment das ganze in der Röhre befindliche Fluidum zur Ruhe. Diese mechanische Interpretation wird, wenn sie auch praktisch nicht ausführbar ist, dem Leser behülflich sein können, ein klareres Verständniss von dem zu bekommen, was man unter einem Fluidum, das keine Circulation besitzt, versteht; sie führt weiter zu einer Ausdehnung von dem Stokes'schen Satze über Molecularrotation. Denn wenn das ganze Fluidum (welches sich unter Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials bewegt) ausserhalb einer kugelförmigen Höhlung von irgend welchem Radius plötzlich fest wird, so kann das Fluidum im Innern der Höhlung keine Bewegung zurückbehalten. Oder, wie wir diesen Satz auch ausdrücken können, jeder sphärische Theil einer sich rotationslos bewegenden Flüssigkeit besitzt, wenn er plötzlich fest wird, nur eine Verschiebungsbewegung ohne Rotation[1]).

Ein gleicher Satz lässt sich auf eine kreisförmige Scheibe oder Cylinder mit ebenen Endflächen bei einem Fluidum ableiten, das sich rotationslos nur innerhalb zweier Dimensionen bewegt.

Die Bewegung eines incompressibeln Fluidums, welches einmal sich in Ruhe befand, hat Theil an der bemerkenswerthen

---

[1]) Thomson on Vortex Motion, am cit. Ort.

Eigenschaft (§. 79), welche allen Systemen, die mit vorgeschriebenen Geschwindigkeiten in Bewegung gesetzt werden, gemein ist, nämlich der, dass die Energie die kleinst möglichste ist. Wenn irgend eine andere Bewegung genommen wird, welche die Continuitätsgleichung und die Grenzbedingungen ebenfalls erfüllt, so ist die Energie derselben nothwendiger Weise grösser wie die der Bewegung, welche von dem Ruhezustande ausgeht.

243. Die Thatsache, dass die rotationslose Bewegung eines incompressibeln Fluidums von einem Geschwindigkeitspotential abhängt, das der Laplace'schen Gleichung genügt, ist der Grund zu einer weitreichenden Analogie zwischen der Bewegung eines solchen Fluidums und der der Electricität oder Wärme in einem gleichförmigen Conductor; es ist häufig von grossem Vortheil, an diese Analogie zu denken. Man kann dasselbe von allen Zweigen der Physik sagen, die mathematisch von einem Potential abhängen. Denn oft tritt es ein, dass die analogen Sätze weit davon entfernt sind, in gleicher Weise gleich einleuchtend zu sein. Z. B. wird der analytische Satz, dass, wenn $\nabla^2\varphi = 0$:

$$\int\int \frac{d\varphi}{dn}\, dS = 0,$$

die Integration über eine geschlossene Fläche ausgedehnt, am leichtesten durch die Interpretation bei der Bewegung eines Fluidums abgeleitet. Einmal abgeleitet kann derselbe aber auch für electrische oder magnetische Kräfte interpretirt werden.

Anderenseits ist es in der Theorie der Leitung von Wärme oder Electricität klar, dass im Innern von S keine stetige Bewegung sein kann ohne Uebertragung quer durch irgend einen Theil der begrenzenden Fläche; dieser Satz giebt aber, wenn er für incompressibele Fluida interpretirt wird, ein wichtiges und viel verborgener liegendes Gesetz.

244. Wenn ein Geschwindigkeitspotential existirt, so kann die Gleichung, welche dazu dient, den Druck zu bestim-

men, in eine einfachere Form gebracht werden. Wir haben nach (1) §. 240:

$$d\varpi = dR - \frac{D}{Dt}\, d\varphi + \frac{1}{2}\, d U^2 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

woraus durch Integration:

$$\varpi = \int \frac{dp}{\varrho} = R - \frac{D\varphi}{Dt} + \frac{1}{2}\, U^2.$$

Nun ist:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{d\varphi}{dt} + u^2 + v^2 + w^2;$$

so dass:

$$\int \frac{dp}{\varrho} = R - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\, U^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

welches die gewöhnlich gegebene Form ist.

Ist ϱ constant, so wird $\int \frac{dp}{\varrho}$ natürlich durch $\frac{p}{\varrho}$ ersetzt.

Die Beziehung zwischen p und φ bei einer Bewegung, die aus dem Ruhezustande durch einen Impuls hervorgerufen wird, kann aus (2) durch Integration abgeleitet werden. Wir sehen, dass schliesslich:

$$\frac{1}{\varrho} \int p\, dt = -\varphi.$$

Dieselbe Folgerung kann man durch eine directe Anwendung der mechanischen Principien auf die Bedingungen einer Impulsbewegung erlangen.

Ist $p = \varkappa \varrho$, so nimmt Gleichung (2) folgende Form an:

$$\varkappa \log \varrho = R - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\, U^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Wenn die Bewegung der Art ist, dass die Geschwindigkeitscomponenten immer dieselben an demselben Punkte des Raumes sind, so wird sie stationär genannt, und φ wird unabhängig von der Zeit. Die Gleichung für den Druck ist dann:

$$\int \frac{dp}{\varrho} = R - \frac{1}{2}\, U^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

oder, wenn keine äusseren Kräfte einwirken:

$$\int \frac{dp}{\varrho} = C - \frac{1}{2} U^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Bei den meisten akustischen Anwendungen von (2) sind die Geschwindigkeiten und die Condensation klein, dann können wir das Glied $\frac{1}{2} U^2$ vernachlässigen und für $\int \frac{dp}{\varrho}$ einsetzen $\frac{\delta p}{\varrho_0}$, wo δp den kleinen veränderlichen Theil von p bedeutet; daher:

$$\frac{\delta p}{\varrho_0} = R - \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6),$$

welches mit:

$$\frac{ds}{dt} + \nabla^2 \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

die Gleichungen ausmacht, mit Hülfe deren die kleinen Schwingungen eines elastischen Fluidums zu untersuchen sind.

Ist $a^2 = \frac{dp}{d\varrho}$, so dass $\delta p = a^2 \varrho_0 s$, so wird (6):

$$a^2 s = R - \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8);$$

wir erhalten durch Elimination von s:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{dR}{dt} + a^2 \nabla^2 \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

245. Der einfachste Fall einer Wellenbewegung ist derjenige, bei welchem die Excursionen eines jeden Theilchens parallel einer festen Linie und in allen Ebenen senkrecht zu dieser Linie dieselben sind. Wir wollen daher (unter Voraussetzung, dass $R = 0$) annehmen, dass φ eine Function von x (und t) allein ist. Unsere Gleichung (9), §. 244, geht über in:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

dieselbe, welche schon in dem Capitel über Saiten behandelt wurde. Wir fanden dort, dass die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi = f(x - at) + F(x + at) \quad \ldots \ldots (2),$$

welche die Fortpflanzung von von einander unabhängigen Wel-

len nach der positiven und negativen Richtung mit der gemeinsamen Geschwindigkeit a darstellt.

Innerhalb solcher Grenzen, welche die Anwendung der angenäherten Gleichung (1) gestatten, ist die Geschwindigkeit des Schalles ganz unabhängig von der Wellengestalt; sie ist z. B. für einfache Wellen:

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - at),$$

dieselbe, welches auch die Wellenlänge sein mag. Die von der positiven Welle und daher auch von der anfänglichen Störung, wenn eine positive Welle allein erzeugt wurde, erfüllte Bedingung ist:

$$a\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

oder nach (8), §. 244:

$$u - as = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

In ähnlicher Weise haben wir für eine negative Welle:

$$u + as = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Welches auch die anfängliche Störung sein mag (u und s sind beide willkürlich), stets kann dieselbe in zwei Theile getheilt werden, die resp. (3) oder (4) genügen, und welche ungestört von einander sich fortpflanzen. Bei jeder Wellencomponente ist die Richtung der Fortpflanzung dieselbe, wie die der Bewegung der verdichteten Theile des Fluidums.

Die Menge der Energie, welche quer durch die Flächeneinheit einer Ebene übertragen wird, die parallel zu der Stirn einer fortschreitenden Welle ist, kann als das mechanische Maass der Strahlung angesehen werden.

Bei einer einfachen Welle, für welche:

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - at) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

wird die Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ des Theilchens in x $\left(\text{gleich } \frac{d\varphi}{dx}\right)$ gegeben durch:

$$\dot{\xi} = -\frac{2\pi}{\lambda} A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - at) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

die Verschiebung ξ wird dargestellt durch:

$$\xi = -\frac{A}{a} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - at) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Der Druck ist $p = p_0 + \delta p$, wo nach (6) §. 244:

$$\delta p = -\frac{2\pi}{\lambda} \varrho_0 a A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - at) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Bezeichnen wir daher mit W die Arbeit, welche in der Zeit t durch die Flächeneinheit der Ebene x abgegeben wird, so haben wir:

$$\frac{dW}{dt} = (p_0 + \delta p)\,\dot{\xi} = \frac{1}{2}\varrho_0 a \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A^2 + \text{periodische Glieder.}$$

Erstreckt sich die Integration in Bezug auf die Zeit über irgend eine Zahl von vollständigen Perioden, oder praktisch, immer, wenn der Integrationsbereich hinreichend gross ist, dann können die periodischen Glieder vernachlässigt werden, und wir dürfen setzen:

$$W : t = \frac{1}{2}\varrho_0 a \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

oder nach (6), wenn β den Maximalwerth von $\dot{\xi}$ bedeutet:

$$W = \frac{1}{2}\varrho_0 \beta^2 a t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Daher ist die Arbeit, welche dazu gebraucht wird, um Wellen vom harmonischen Typus zu erzeugen, gerade so gross, wie die Arbeit, welche dazu nothwendig ist, um der ganzen Luftmasse, durch welche die Welle sich erstreckt, die Maximalgeschwindigkeit zu ertheilen [1]).

In Werthen des Maximalausschlags α wird nach (7) und (9):

$$W = 2\pi^2 \varrho_0 \frac{a^3}{\lambda^2}\alpha^2 t = 2\pi^2 \varrho_0 a t \frac{\alpha^2}{\tau^2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)\,[2]),$$

---

[1]) Die erste Angabe des in Gleichung (10) enthaltenen Principes, der ich begegnet bin, findet sich in einer Arbeit von Sir W. Thomson: „Ueber die mögliche Dichtigkeit des das Licht tragenden Mediums und über den mechanischen Werth einer Cubikmeile Sonnenlicht.“ Phil. Mag. IX, p. 36, 1855.

[2]) Bosanquet, Phil. Mag. XLV, p. 173. 1873.

worin τ ($= \lambda : a$) die Schwingungsdauer bedeutet. Bei einem gegebenen Medium ist das mechanische Maass der Intensität direct proportional dem Quadrate der Amplitude und umgekehrt dem Quadrate der Schwingungsdauer. Der Leser muss sich indessen vor der Voraussetzung hüten, dass das mechanische Maass der Intensität von Wellen mit verschiedenen Wellenlängen ein eigentliches Maass für die Stärke der entsprechenden Schalle sind, wie wir diese mit dem Ohre empfinden.

Bei jeder ebenen fortschreitenden Welle, ob ihr Typus nun harmonisch ist oder nicht, ist die ganze Energie zu gleichen Theilen getheilt in die potentielle und kinetische Form. Der einfachste Weg zu diesem Resultat ist vielleicht der, die Bildung von positiven und negativen Wellen aus einer Anfangsstörung zu betrachten, deren Energie ganz potentiell ist[1]. Die totalen Energieen sind ersichtlich bei den beiden abgeleiteten fortschreitenden Wellen einander gleich und machen zusammen die Energie der ursprünglichen Störung aus. Ausserdem ist bei jeder fortschreitenden Welle die Verdichtung (oder Verdünnung) die Hälfte von der, welche im Anfange an dem entsprechenden Punkte vorhanden war, so dass die potentielle Energie jeder progressiven Welle ein Viertel von der der ursprünglichen Störung beträgt. Da, wie wir eben gesehen haben, die ganze Energie die Hälfte derselben Grösse ist, so folgt, dass bei einer fortschreitenden Welle jeder Art die Hälfte der Energie potentiell und die andere Hälfte kinetisch ist.

Dieselbe Folgerung kann man auch aus den allgemeinen Ausdrücken für die potentielle und kinetische Energie, und den in (3) und (4) ausgedrückten Beziehungen zwischen Geschwindigkeit und Verdichtung ziehen. Die potentielle Energie des Volumenelementes dV ist die Arbeit, welche bei der Ausdehnung der entsprechenden Gasmenge von dem vorhandenen zu dem normalen Volumen gewonnen würde, wenn der Ausdehnung sich fortwährend der normale Druck

[1]) Phil. Mag. [5] I, p. 260. 1876.

p_0 widersetzte. In jedem Stadium der Ausdehnung ist der wirksame Druck δp, wenn die Verdichtung mit s' bezeichnet wird, nach §. 244 gleich $a^2 \varrho_0 s'$; dieser Druck muss dann mit dem entsprechenden Volumenzuwachs $dV \,.\, ds'$ multiplicirt werden. Die ganze während der Ausdehnung von dV auf $dV\,(1 + s)$ gewonnene Arbeit ist demnach:

$$a^2 \varrho_0 \, dV \,.\int\limits_0^s s' \, ds' \text{ oder } \frac{1}{2} \, a^2 \varrho_0 \, dV \,.\, s^2.$$

Die allgemeinen Ausdrücke für die potentiellen und kinetischen Energieen sind also:

$$\text{Potentielle Energie} = \frac{1}{2} \, a^2 \varrho_0 \iiint s^2 dV \; \ldots \; (12),$$

$$\text{Kinetische Energie} = \frac{1}{2} \, \varrho_0 \iiint u^2 dV \; \ldots . \; (13),$$

und diese sind bei ebenen fortschreitenden Wellen, für welche

$$u = \pm \, as$$

ist, einander gleich.

Sind die ebenen fortschreitenden Wellen von der harmonischen Art, so sind u und s zu jeder Zeit Kreisfunctionen von einer der Raumcoordinaten (x), und daher ist der Mittelwerth ihrer Quadrate die Hälfte von dem Maximalwerth. Darnach ist die totale Energie der Wellen gleich der kinetischen Energie der ganzen von der Welle ergriffenen Luft, wenn dieselbe sich mit dem Maximum der in den Wellen auftretenden Geschwindigkeiten fortbewegt, oder gleich der potentiellen Energie derselben Luftmasse, wenn dieselbe auf die grösste Dichtigkeit bei den Wellen verdichtet wird.

246. Die erste theoretische Untersuchung über die Geschwindigkeit des Schalles wurde von Newton angestellt, der annahm, dass die Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit stets durch das Boyle'sche Gesetz geregelt würde. Nehmen wir an $p = \varkappa \varrho$, so sehen wir, dass die Geschwindigkeit des Schalles durch $\sqrt{\varkappa}$, oder $\sqrt{p} : \sqrt{\varrho}$ ausgedrückt wird, worin die Dimensionen von p (= Kraft : Fläche) sind

$[M]\ [L]^{-1}\ [T]^{-2}$, und die von ϱ (= Masse : Volumen) sind $[M]\ [L]^{-3}$. Newton drückte sein Resultat in Werthen der Höhe der homogenen Atmosphäre aus, welche durch folgende Gleichung definirt wird:

$$g\varrho h = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

worin p und ϱ der Druck und die Dichte an der Oberfläche der Erde sind. Die Geschwindigkeit des Schalles ist demnach $\sqrt{gh}$, oder sie ist gleich der Geschwindigkeit, welche ein unter Wirkung der Schwerkraft fallender Körper beim Durchfallen der halben Höhe der homogenen Atmosphäre annehmen würde.

Um ein numerisches Resultat zu erhalten, müssen wir ein Paar von gleichzeitigen Werthen von p und ϱ kennen. Durch den Versuch ist gefunden, dass die Dichtigkeit von trockener Luft bei 0° C. unter einem Druck von 1033 Gramm per Quadratcentimeter gleich ist 0,001293 Gramm per Cubikcentimeter. Nehmen wir Centimeter, Gramm und Secunde als Fundamentaleinheiten (C.-G.-S.-System), so geben diese Daten:

$$p = 1033 \times g = 1033 \times 981,\ \varrho = 0{,}001293,$$

woraus

$$a = \sqrt{\frac{1033 \times 981}{0{,}001293}} = 27995;$$

so dass die Geschwindigkeit des Schalles bei 0° gleich 279,95 Meter in der Secunde wäre, welches ungefähr um ein Sechstel zu klein gegen das Resultat der directen Beobachtung ist.

Newton's Untersuchung stellte den Satz auf, dass die Geschwindigkeit des Schalles, sowohl von der Amplitude der Schwingung, wie von der Höhe unabhängig ist. Die Abweichung zwischen dem von Newton berechneten Werth (veröffentlicht 1687) und dem experimentell ermittelten war aber nicht erklärt, bis Laplace darauf aufmerksam machte, dass die Benutzung des Boyle'schen Gesetzes die Annahme in sich schliesse, dass bei den den Schall begleitenden Verdichtungen und Verdünnungen die Temperatur constant bleibe im Widerspruch mit der bekannten Thatsache, dass bei plötz-

licher Verdichtung der Luft die Temperatur derselben steige. Die Gesetze von Boyle und Charles geben nur eine Beziehung zwischen den drei Grössen: Druck, Volumen und Temperatur eines Gases und das ist:

$$pv = R\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

wo θ von dem Nullpunkt des Luftthermometers an gerechnet wird. Daher ist es ohne eine Hülfsannahme nicht möglich, die Beziehung zwischen p und v (oder ϱ) allein zu erhalten. Laplace nahm an, dass die Verdichtungen und Verdünnungen, welche bei der Fortpflanzung des Schalles stattfinden, mit solcher Geschwindigkeit vor sich gehen, dass die erzeugte Wärme und Kälte keine Zeit habe wegzuströmen, und dass daher die Beziehung zwischen Druck und Volumen merklich dieselbe ist, als wenn die Luft in einem die Wärme vollkommen nicht leitenden Gefässe eingeschlossen wäre. Unter diesen Umständen ist die einer gegebenen Verdichtung oder Verdünnung entsprechende Druckänderung grösser wie die bei der Annahme einer constanten Temperatur stattfindende. Demgemäss fällt die Geschwindigkeit des Schalles grösser aus.

Es bezeichne in Gleichung (2) v das Volumen und p den Druck der Masseneinheit, es sei θ ausgedrückt in Graden Celsius, vom absoluten Nullpunkt an gerechnet[1]). Der Zustand des Gases ist (wenn dasselbe gleichförmig) durch irgend welche zwei der drei Grössen p, v, θ bestimmt; die dritte Grösse kann in Werthen der beiden anderen ausgedrückt werden. Die Beziehung zwischen den gleichzeitigen Variationen der drei Grössen ist:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Um die durch dp und dv bezeichnete Aenderung zu bewirken, muss im Allgemeinen dem Gase Wärme zugeführt werden. Nennen wir die erforderliche Wärmemenge dQ, so können wir schreiben:

---

[1]) Nach der gewöhnlichen hunderttheiligen Scala ist der absolute Nullpunkt ungefähr $= 273^0$.

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dv}\right) dv + \left(\frac{dQ}{dp}\right) dp \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Wir wollen nun (a) annehmen, dass $dp = 0$. Gleichungen (3) und (4) geben:

$$\frac{dQ}{d\theta} \ (p \text{ constant}) = \left(\frac{dQ}{dv}\right) \frac{v}{\theta},$$

worin $\frac{dQ}{d\theta}$ (p constant) die specifische Wärme des Gases bei constantem Druck bedeutet. Wird diese mit $\varkappa_p$ bezeichnet, so haben wir:

$$\varkappa_p = \left(\frac{dQ}{dv}\right) \frac{v}{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Anderenseits nehmen wir (b) an, dass $dv = 0$. Wir finden dann auf gleiche Weise, dass, wenn $\varkappa_v$ die specifische Wärme bei constantem Volumen bedeutet:

$$\varkappa_v = \left(\frac{dQ}{dp}\right) \frac{p}{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Um für den Fall, dass kein Austausch von Wärme stattfindet, die Beziehung zwischen dp und dv zu erhalten, haben wir nur zu setzen $dQ = 0$. Daher:

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right) dv + \left(\frac{dQ}{dp}\right) dp = 0,$$

oder nach Ersetzung der Differentialquotienten von Q durch ihre Ausdrücke in $\varkappa_v$, $\varkappa_p$:

$$\varkappa_p \frac{dv}{v} + \varkappa_v \frac{dp}{p} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Da $v = \frac{1}{\varrho}$, so ist:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\varrho}{\varrho};$$

so dass:

$$a^2 = \frac{dp}{d\varrho} = \frac{p}{\varrho}\frac{\varkappa_p}{\varkappa_v} = \frac{p}{\varrho}\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

wenn wir, wie es gewöhnlich geschieht, das Verhältniss der specifischen Wärmen mit γ bezeichnen. Der Laplace'sche

Werth für die Geschwindigkeit des Schalles ist daher in dem Verhältniss von $\sqrt{\gamma} : 1$ grösser wie der Newton'sche.

Durch Integration von (8) erhalten wir für die Beziehung zwischen p und ϱ, wenn kein Wärmeaustausch stattfindet:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)^{1)},$$

worin p_0 und ϱ_0 zwei gleichzeitige Werthe sind. Unter denselben Umständen ist die Beziehung zwischen Druck und Temperatur nach (3):

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Die Grösse γ lässt sich experimentell in directer Weise mit Genauigkeit nicht bestimmen. Ein angenäherter Werth kann aber nach einer Methode erhalten werden, deren Princip im Folgenden gegeben wird. Luft wird in einem Gefässe, das sich mit der äusseren Atmosphäre durch Oeffnen eines grossen Hahnes in Verbindung setzen lässt, comprimirt. Zunächst steigt die Temperatur der comprimirten Luft, nach Verlauf einiger Zeit ist aber die überschüssige Wärme entwichen und die ganze Masse nimmt die Temperatur Θ der Atmosphäre an. Der Druck (durch ein Manometer gemessen) sei p. Der Hahn wird nun für eine so kurze Zeit geöffnet, wie dazu nöthig ist, damit das Gleichgewicht zwischen den Drucken vollständig hergestellt wird, das ist so lange, bis der innere Druck gleich dem der Atmosphäre P geworden ist. Ist der Versuch richtig arrangirt, so geht diese Operation so rasch vor sich, dass die Luft in dem Gefäss nicht genügend Zeit hat um Wärme von den Seitenwänden aufzunehmen, dass sie sich daher nahezu nach dem durch (9) ausgedrückten Gesetz ausdehnt. Ihre Temperatur θ in dem Momente, wo die Operation vollendet ist, wird demnach bestimmt durch:

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{\Theta}{\theta}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

---

1) Es ist hier angenommen, dass γ constant ist. Die Gleichung scheint zuerst von Poisson gegeben zu sein.

Man lässt dann die eingeschlossene Luft Wärme absorbiren, bis sie wieder die Temperatur Θ der Atmosphäre angenommen hat, worauf ihr Druck p' beobachtet wird. Während der letzten Aenderung ist das Volumen constant, und daher giebt die Beziehung zwischen Druck und Temperatur:

$$\frac{P}{p'} = \frac{\theta}{\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

so dass durch Elimination von $\theta : \Theta$ kommt:

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{p'}{P}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

woraus:

$$\gamma = \frac{\log p - \log P}{\log p - \log p'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Aus Versuchen dieser Art bestimmten Clement und Desormes $\gamma = 1{,}3492$. Die Methode kann aber ersichtlich nicht sehr genau sein. Der Werth von γ, welcher erforderlich ist, um die berechnete und beobachtete Schallgeschwindigkeit gleich zu machen, beträgt 1,408. Ueber die wesentliche Genauigkeit dieses Werthes kann kein Zweifel herrschen.

Wir sind indess, um zur Kenntniss des Werthes für γ zu kommen, nicht abhängig von akustischen Erscheinungen. Die specifische Wärme $\varkappa_p$ bei constantem Druck ist experimentell von Regnault bestimmt worden; wenn nun auch die experimentelle Methode für $\varkappa_v$ wegen besonderer ihr anhängenden Schwierigkeiten kein zufriedenstellendes Resultat giebt, so kann doch die gesuchte Grösse auf indirecte Weise durch eine Beziehung zwischen den beiden specifischen Wärmen erhalten werden, welche von der neueren Thermodynamik ans Licht gebracht wurde.

Eliminiren wir dp aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{\theta} &= \varkappa_p \frac{dv}{v} + \varkappa_v \frac{dp}{p} \\ \frac{d\theta}{\theta} &= \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

so erhalten wir:

$$dQ = (\varkappa_p - \varkappa_v)\frac{pdv}{R} + \varkappa_v d\theta \quad \text{. . . . . .} \quad (15).$$

Wir wollen annehmen, dass $dQ = 0$, oder dass kein Wärmeaustausch stattfindet. Es ist bekannt, dass die während der Comprimirung eines annähernd vollkommenen Gases, wie etwa Luft, entwickelte Wärme meist genau das Wärmeäquivalent der bei der Comprimirung geleisteten Arbeit ist. Dieses wichtige Princip wurde von Mayer in seiner berühmten Arbeit über die dynamische Theorie der Wärme aufgestellt, wenn auch auf Gründe gestützt, die kaum als zulässig angesehen werden können. Wie aber dem auch sein mag, das Princip selbst ist sehr nahezu richtig, wie seitdem durch Versuche von Joule und Thomson bestätigt ist.

Messen wir Wärme in dynamischen Einheiten, so kann das Mayer'sche Princip folgendermaassen ausgedrückt werden: $\varkappa_v d\theta = pdv$ unter der Voraussetzung, dass kein Wärmeaustausch stattfindet. Vergleichen wir dies mit (15), so sehen wir, dass:

$$\varkappa_p - \varkappa_v = R \quad \text{. . . . .} \quad (16),$$

und daher:

$$\gamma = \frac{\varkappa_p}{\varkappa_v} = \frac{\varkappa_p}{\varkappa_p - R} \quad \text{. . . . .} \quad (17).$$

Der Werth von pv ist, wie wir sahen, in Gravitationsmaass (Gramm, Centimeter): 1033 : 0,001293 bei 0° C., so dass:

$$R = \frac{1033}{0{,}001293 \times 272{,}85}.$$

Nach Regnault's Versuchen beträgt die specifische Wärme der Luft 0,2379 von der des Wassers; ferner sind um ein Gramm Wasser um einen Grad Celsius zu erwärmen, 42 350 Gramm-Centimeter Arbeit nöthig. Daher ist in denselben Einheiten wie R:

$$\varkappa_p = 0{,}2379 \times 42\,350.$$

Berechnen wir γ nach diesen Daten, so finden wir: $\gamma = 1{,}410$, welcher Werth sehr genau mit dem aus der Geschwindigkeit des Schalles abgeleiteten übereinstimmt. Man

verdankt diese Methode Rankine, der sie im Jahre 1850 dazu benutzte, die specifische Wärme der Luft aus dem Joule'schen Wärmeäquivalent und der beobachteten Geschwindigkeit des Schalles zu berechnen. Auf diese Weise gab er das Resultat der Regnault'schen Versuche, das erst 1853 veröffentlicht wurde, im Voraus an.

247. Die Laplace'sche Theorie ist oft missverstanden worden und ein Stein des Anstosses für die merkwürdigen Leute geworden, welche De Morgan „Paradoxers" nennt. Es kann aber kein vernünftiger Zweifel darüber sein, dass vor jeder Berechnung die Hypothese, dass kein Wärmeaustausch stattfindet, vor der ebenso speciellen Hypothese, dass bei der Fortbewegung des Schalles stets constante Temperatur herrscht, den Vorzug verdient. Es würde eine wirkliche Schwierigkeit vorhanden sein, wenn die Geschwindigkeit des Schalles nicht entschieden grösser wie der Newton'sche Werth wäre; das Wunderbare ist eher das, dass der Grund zu diesem Ueberschusse so lange unentdeckt blieb.

Die einzige Frage, welche möglicherweise Weise als offen angesehen werden kann, ist die, ob nicht ein kleiner Theil der entwickelten Wärme und Kälte durch Leitung oder Strahlung weggeleitet wird, bevor derselbe seine volle Wirkung geäussert hat. Alles muss von der Schnelligkeit der Aenderungen abhängen. Unter einer gewissen Grenze der Schnelligkeit hat die überschüssige oder fehlende Wärme Zeit sich auszugleichen, die Temperatur bleibt dann merklich constant. In diesem Falle würde die Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit die sein, welche zu dem Newton'schen Werth für die Geschwindigkeit des Schalles führt. Auf der anderen Seite wird sich das Gas oberhalb einer gewissen Grenze in der Schnelligkeit der Aenderungen so verhalten, als wäre es in einem nicht leitenden Gefässe eingeschlossen, wie in der Laplace'schen Theorie angenommen wird. Wenn nun auch die wirkliche Geschwindigkeit des Schalles aus der letzteren Annahme sich besser ergiebt, wie aus der ersteren, so kann doch (wie wir sagen müssen) eine merkliche Abweichung von

dem Gesetz zwischen Druck und Dichtigkeit, welches in der Laplace'schen Theorie angenommen ist, vorhanden sein. Diese Abweichung würde eine etwas geringere Geschwindigkeit für die Fortpflanzung des Schalles geben.

Stokes hat diese Frage ausführlich in einer 1851 veröffentlichten Arbeit[1]), von der das Folgende ein Abriss ist, behandelt.

Die mechanischen Gleichungen für die kleine Bewegung der Luft sind:

$$\frac{dp}{dx} = - \varrho \frac{du}{dt} \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

mit der Continuitätsgleichung:

$$\frac{ds}{dt} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Temperatur nehmen wir als gleichförmig an, soweit, wie sie nicht durch die Schwingungen selbst geändert wird, so dass wir, wenn θ den Ueberschuss der Temperatur bedeutet, haben:

$$p = \varkappa \varrho \, (1 + s + \alpha \theta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Eine kleine plötzliche Verdichtung erzeugt eine Temperaturerhöhung, welche durch βs bezeichnet werden soll. Es sei $d\,Q$ die Wärmemenge, welche in der Zeit dt in das Volumelement eindringt; sie möge gemessen sein durch die Temperaturerhöhung, welche sie hervorrufen würde, wenn keine Verdichtung stattfände. Dann ist (bei Vernachlässigung der Unterscheidung zwischen $\frac{D}{Dt}$ und $\frac{d}{dt}$)

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta \frac{ds}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

wo $\frac{dQ}{dt}$ eine Function von θ und deren Differentialquotienten nach dem Raum ist, deren Form von dem speciellen Charakter der Zerstreuung abhängt. Zwei extreme Fälle mögen hervorgehoben werden. Der erste ist der, wo das Bestreben

[1]) Phil. Mag. [4] I, 305.

zur Temperaturausgleichung nur der Leitung verdankt wird, der zweite der, wo die thätige Ursache Strahlung ist und wo die Durchlässigkeit des Mediums der Art ist, dass strahlende Wärme innerhalb eines Raumes von einigen Wellenlängen nicht merklich absorbirt wird.

In dem ersten Fall haben wir $\frac{dQ}{dt} \propto \nabla^2\theta$, in dem letzten, welches der von Stokes für seine analytische Untersuchung auserwählte ist, $\frac{dQ}{dt} \propto (-\theta)$, wobei Newton's Strahlungsgesetz als eine hinreichende Annäherung an die Richtigkeit angenommen wird. Wir haben dann:

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta \frac{ds}{dt} - q\theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Bei ebenen Wellen, auf welche wir unsere Aufmerksamkeit beschränken wollen, verschwinden v und w, während u, p, s, θ Functionen von x (und t) allein sind. Eliminiren wir p und u zwischen (1), (2) und (3), so finden wir:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \varkappa \left(\frac{d^2s}{dx^2} + \alpha \frac{d^2\theta}{dx^2}\right);$$

hieraus und aus (5) erhalten wir:

$$\left(\frac{d}{dt} + q\right) \frac{d^2s}{dt^2} = \varkappa \left(\gamma \frac{d}{dt} + q\right) \frac{d^2s}{dx^2} \quad \ldots \ldots (6),$$

wenn γ (in demselben Sinne wie früher) für $1 + \alpha\beta$ geschrieben wird.

Sind die Schwingungen harmonisch, so dürfen wir annehmen, dass sich s proportional e^{int} ändert; die Gleichung wird damit:

$$\frac{d^2s}{dx^2} + \frac{n^2}{\varkappa} \cdot \frac{q + in}{q + i\gamma n} \cdot s = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (7).$$

Der Coefficient von s in (7) möge in die Form $\mu^2 e^{-2i\psi}$ gebracht werden, woraus:

$$\mu^4 = \frac{n^4}{\varkappa^2} \cdot \frac{p^2 + n^2}{q^2 + \gamma^2 n^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

und

$$2\psi = arc\,tg \frac{\gamma n}{q} - arc\,tg \frac{n}{q} = arc\,tg \frac{(\gamma - 1)nq}{\gamma n^2 + q_2} \ldots (9).$$

Gleichung (7) wird dann erfüllt durch Ausdrücke von der Form:

$$e^{\pm i\mu(\cos\psi - i\sin\psi)x};$$

wir müssen aber (wenn μ positiv und ψ kleiner wie $\frac{1}{2}\pi$ ist), für die in der positiven Richtung fortschreitende Welle das untere Zeichen nehmen. Bei Vernachlässigung des imaginären Theiles finden wir als eigentliche Lösung:

$$s = Ae^{-\mu\sin\psi x}\cos(nt - \mu\cos\psi x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Das zunächst zu Bemerkende ist das, dass der Schall nicht in einige Entfernung fortgepflanzt werden kann, wenn nicht $\sin\psi$ unmerklich klein ist.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (V) ist:

$$V = n\mu^{-1}\sec\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

welcher Werth sich, wenn ψ unmerklich klein ist, auf:

$$V = n\mu^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

reducirt.

Nun sehen wir aus (9), dass ψ nicht unmerklich klein sein kann, wenn nicht $q : n$ entweder sehr gross oder sehr klein ist. Bei der ersten Annahme haben wir nach (11) oder direct aus (7) angenähert: $V = \sqrt{\varkappa}$ (Newton); und aus der zweiten $V = \sqrt{\varkappa\gamma}$ (Laplace), wie es offenbar auch der Fall sein muss, wenn die Bedeutung von q in (5) beachtet wird. Was wir jetzt noch aus den obigen Relationen lernen, ist das, dass wenn q und n mit einander vergleichbar sind, die Wirkung hiervon nicht bloss in einer Abweichung des Werthes von V von einem der Grenzwerthe, sondern auch in einer sehr raschen Dämpfung des Tones bestehen würde, die aber, wie wir wissen, in der Natur nicht stattfindet.

Von diesem theoretischen Resultat können wir uns, wie Stokes auseinandersetzt, ohne Hülfe der Analysis überzeugen. Denken wir uns eine Luftmasse in einen Cylinder, in welchem ein Kolben in einer abwechselnden Bewegung arbeitet, eingeschlossen. Ist die Periode der Bewegung sehr lang, so bleibt die Temperatur der Luft nahezu constant, da die durch die Compression entwickelte Wärme Zeit hat, um durch Leitung

oder Strahlung zu entweichen. Unter diesen Umständen ist der Druck eine Function des Volumens; jede Arbeit, welche zur Hervorrufung einer bestimmten Compression aufgewandt ist, wird wieder gewonnen, wenn der Kolben sich durch dieselbe Lage in der entgegengesetzten Richtung bewegt; schliesslich ist keine Arbeit verzehrt. Nun wollen wir annehmen, dass die Bewegung so rasch vor sich geht, dass keine Zeit vorhanden ist, damit die durch die Verdichtungen und Verdünnungen entwickelte Wärme und Kälte entweichen kann. Der Druck bleibt noch eine Function des Volumens und keine Arbeit ist zerstreut. Der einzige Unterschied ist der, dass jetzt die Druckänderungen im Vergleich mit den Aenderungen des Volumens beträchtlicher wie vorher sind. Wir sehen, woher es kommt, dass sowohl nach Newton's wie nach der Laplace'schen Hypothese die Wellen ohne Zerstreuung, wenn auch mit verschiedenen Geschwindigkeiten vorwärts eilen.

Das Resultat wird aber in den zwischenliegenden Fällen, wenn die Bewegung des Kolbens weder so langsam ist, dass die Temperatur constant bleibt, noch so rasch, dass der Wärme keine Zeit bleibt sich auszugleichen, ein anderes. Die zur Erzeugung einer kleinen Verdichtung aufgewendete Arbeit findet sich nicht mehr vollständig während der entsprechenden Verdünnung wieder wegen der Verringerung der Temperatur, da ein Theil der bei der Compression entwickelten Wärme in der Zwischenzeit entwichen ist. In der That schliesst der Uebergang von Wärme durch Leitung oder Strahlung von einem wärmeren bis zu einem um ein Endliches kälteren Körper stets Zerstreuung in sich, ein Princip, welches eine fundamentale Stellung in der Thermodynamik einnimmt. Um daher die Bewegung des Kolbens aufrecht zu erhalten muss von aussen Energie zugeführt werden, und demnach muss, wenn nur ein begrenzter Vorrath davon vorhanden ist, aus dem man schöpfen kann, die Bewegung schliesslich aufhören.

Ein anderer erwähnenswerther Punkt ist der, dass V, wenn q und n mit einander vergleichbar wären, von n, d. i. von der Tonhöhe abhängen würde. Eine solche Abhängig-

keit zu vermuthen, dazu geben uns aber die Versuche keinen Anhalt. Im Gegentheil: sie scheinen zu beweisen, dass eine solche Abhängigkeit nicht existirt.

Aus (10) erkennen wir, dass die Abnahme in der Intensität, per Wellenlänge gerechnet, zugleich mit *tang* ψ oder ψ ein Maximum wird; aus (9) folgt, dass ψ ein Maximum ist, wenn $q : n = \sqrt{\gamma}$. In diesem Falle ist:

$$\mu = n\varkappa^{-\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{4}},\ 2\psi = arc\,tg\,\gamma^{\frac{1}{2}} - arc\,tg\,\gamma^{-\frac{1}{2}} \ldots\ldots (13),$$

woraus, wenn wir $\gamma = 1{,}36$ nehmen, $2\psi = 8^0\,47'$.

Durch Benutzung dieser Daten ergiebt sich, dass für jede weitere Wellenlänge die Schwingungsamplitude in dem Verhältniss von 0,6172 verkleinert wird.

Um ein numerisches Beispiel zu nehmen, sei $\tau = \frac{1}{300}$ einer Secunde, λ = Wellenlänge = 44 Zoll.

In 20 Yards Entfernung würde die Intensität in dem Verhältniss von ungefähr 7 Millionen zu Eins verringert sein. Dem entsprechend wäre:

$$q = 2198 \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Wenn der Werth von q wirklich der eben hingeschriebene wäre, so würden Töne von der angegebenen Höhe sehr rasch gedämpft. Wir schliessen daraus, dass q thatsächlich entweder viel grösser oder viel kleiner ist. Aber selbst ein so grosser Werth wie 2000 ist gänzlich unzulässlich, wovon wir uns durch Betrachtung der Bedeutung von Gleichung (5) überzeugen können.

Wir wollen annehmen, dass durch eine starre, für strahlende Wärme durchlässige Hülle das Volumen einer kleinen Gasmasse constant erhalten wird. Dann ist die Bestimmungsgleichung für den zu irgend einer Zeit stattfindenden Wärmezustand:

$$\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0,$$

woraus:

$$\theta = Ae^{-qt} \ldots\ldots\ldots\ldots (15),$$

A bedeutet hierin den anfänglichen Temperaturüberschuss. Die Gleichung zeigt, dass nach der Zeit q^{-1} der Temperatur-

überschuss auf weniger wie die Hälfte des ursprünglichen Werthes gesunken ist. Die Annahme, dass dies in ein zweitausendstel Secunde eintreten kann, würde schon mit den oberflächlichsten Beobachtungen in Widerspruch stehen.

Wir sind daher zu der Annahme berechtigt, dass q sehr klein im Verhältniss zu n ist; unsere Gleichungen werden daher angenähert:

$$\mu = \frac{n}{\varkappa^{1/2}\gamma^{1/2}}, \quad 2\psi = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{q}{n}, \quad V = n\mu^{-1} = \varkappa^{1/2}\gamma^{1/2},$$

$$s = Ae^{-(1-\gamma^{-1})\frac{qx}{2V}} \cos\frac{2\pi}{\lambda}(Vt - x) \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Man muss sich die Wirkungen einer kleinen Wärmestrahlung eher in der Dämpfung der Schwingung, als in einer Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestehend denken.

Stokes berechnet, dass, wenn $\gamma = 1{,}414$, $V = 1100$ ist, das Verhältniss $(N : 1)$, in welchem die Intensität beim Durcheilen der Strecke x von Seiten der Welle vermindert wird, gegeben ist durch $\log_{10} N = 0{,}0001156\, qx$ in engl. Fuss-Secunden-Maass. Obschon wir nicht im Stande sind, genaue Messungen über die Intensität des Schalles anzustellen, so schliesst doch die Thatsache, dass hörbare Schwingungen Stunden weit fortgepflanzt werden können, jeden solchen Werth für q aus, welcher die Geschwindigkeit der Uebertragung des Schalles wesentlich beeinflussen würde.

Weiter ist es auch nicht möglich, der Luft ein solches Leitungsvermögen beizulegen, dass dadurch die Anwendbarkeit der Laplace'schen Theorie merklich beeinträchtigt würde. Um die Wirkungen der Leitung näher kennen zu lernen haben wir nur in (5) an Stelle von q zu setzen: $-q'\frac{d^2}{dx^2}$. Nehmen wir als particuläre Lösung:

$$s = Ae^{i(nt + mx)},$$

so finden wir:

$$m^2 in\varkappa\gamma = in^3 + q'n^2m^2 - \varkappa q'm^4,$$

woraus, wenn q' relativ klein ist, folgt:

$$m = \frac{-n}{\sqrt{\varkappa\gamma}}\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{q'n}{2\varkappa\gamma}\,i\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Daher lautet die Lösung in reellen Grössen:

$$s = A\,.\,Exp\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{q'n^2x}{2(\varkappa\gamma)^{3/2}}\right)\cos\left(nt - \frac{nx}{\sqrt{\varkappa\gamma}}\right) \ldots (18),$$

dieselbe giebt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit noch immer bei diesem Grad der Annäherung gleich $\sqrt{\varkappa\gamma}$.

Aus (18) geht hervor, dass die erste Wirkung der Leitung sich, ebenso wie bei der Strahlung, eher auf die Amplitude, wie auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erstreckt. In der Wirklichkeit ist das Leitungsvermögen der Gase so schwach, und bei hörbaren Schallen irgend welcher Art die Zeit, während welcher Leitung stattfinden kann, so klein, dass eine Störung aus dieser Ursache nicht beachtet zu werden braucht.

In den vorhergehenden Auseinandersetzungen nahmen wir an, dass die Wellen sich in einem offenen Raum fortpflanzen. Befindet sich die Luft in einer Röhre eingeschlossen, deren Durchmesser im Vergleich mit der Wellenlänge klein ist, so werden die Bedingungen des Problems geändert, wenigstens was die Leitung betrifft. Das, was wir hierüber zu sagen haben, wird aber an einer anderen Stelle einen zweckmässigeren Platz finden.

248. Aus dem Ausdruck: $\sqrt{(p\gamma)} : \sqrt{\varrho}$ sehen wir, dass die Schallgeschwindigkeit bei demselben Gase unabhängig von der Dichtigkeit ist, weil bei constanter Temperatur p sich wie ϱ ändert ($p = R\varrho\theta$). Auf der anderen Seite ist die Schallgeschwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur, so dass wir, wenn a_0 der Werth jener bei 0° C. ist, haben:

$$a = a_0\sqrt{1 + \frac{\theta'}{273}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin die Temperatur in der gewöhnlichen Weise vom Gefrierpunkt des Wassers an gerechnet wird.

Die merkbarste Folge der Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Temperatur ist die Veränderlichkeit der Höhe der Orgelpfeifen. Wir werden in den folgenden Capiteln sehen, dass die Periode des Tones eines Flötenregisters der Orgel die Zeit ist, welche eine Bewegung gebraucht, um eine Strecke zu durchlaufen, die ein bestimmtes Vielfache der Pfeifenlänge beträgt. Daher ändert sich die Schwingungsdauer der Orgelpfeife umgekehrt wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Die aus dieser Tonänderung stammende Unzuträglichkeit wird durch die Thatsache noch vergrössert, dass die Rohrpfeifen nicht in gleicher Weise beeinflusst werden, so dass eine Temperaturänderung eine Orgel aus ihrer Stimmung bringt.

Prof. Mayer[1]) hat vorgeschlagen, den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wellenlänge einer pyrometrischen Methode zu Grunde zu legen; ich weiss indessen nicht, ob der Versuch dazu schon jemals ausgeführt ist.

Die Richtigkeit von (1) ist von Kundt für Luft von 0° und 100° experimentell bestätigt worden. Siehe §. 260.

Bei verschiedenen Gasen ist a bei bestimmter Temperatur und bestimmtem Druck umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus den Dichtigkeiten, wenigstens wenn γ constant ist[2]). Für die nicht condensirbaren Gase unterscheidet sich γ nicht merklich von seinem Werth für Luft.

Die Geschwindigkeit des Schalles ist nicht ganz von dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft unabhängig, da bei einem bestimmten Druck feuchte Luft etwas leichter wie trockene Luft ist. Man hat berechnet, dass bei 10° C. mit Feuchtigkeit gesättigte Luft den Schall um 2 bis 3 Fuss rascher fortleitet, wie trockene Luft.

Die Formel $a^2 = \frac{dp}{d\varrho}$ kann dazu benutzt werden, die

---

[1]) Ueber ein akustisches Pyrometer. Phil. Mag. [4], XLV, p. 18, 1873.

[2]) Nach der kinetischen Gastheorie wird die Geschwindigkeit des Schalles allein durch die mittlere Geschwindigkeit der Molecüle bestimmt und ist dieser proportional. Preston, Phil. Mag. [5], III, p. 441. 1877.

Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten zu berechnen, oder umgekehrt, wenn diese bekannt ist, den Zusammendrückbarkeits-Coefficienten zu bestimmen. Bei Wasser hat man durch Versuche ermittelt, dass die Compression per Atmosphäre 0,0000457 beträgt. Daher ist, wenn $dp = 1033 \times 981$ in absoluten C. G. S. Einheiten:

$$d\varrho = 0{,}0000457, \text{ da } \varrho = 1.$$

Hieraus:

$$a = 1489 \text{ Meter per Secunde},$$

welches nicht viel von dem beobachteten Werth (1435) abweicht.

249. In den vorhergehenden Abschnitten ist die Theorie der ebenen Wellen aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen abgeleitet. Wir wollen nun zu einer hiervon unabhängigen Ableitungsart übergehen, bei welcher die Bewegung durch die wirkliche Lage der Luftschichten ausgedrückt wird, anstatt mittelst des Geschwindigkeitspotentials, dessen Hülfe nicht mehr nöthig ist, um so mehr als bei einer Dimension keine Rede von Molecularrotation sein kann.

Bestimmen y, $y + \frac{dy}{dx}dx$ zur Zeit t die wirklichen Lagen von benachbarten Luftschichten, deren Gleichgewichtslagen durch x und $x + dx$ bestimmt sind, so ist die Dichtigkeit ϱ der von diesen beiden Luftschichten eingeschlossenen Schicht gegeben durch:

$$\varrho : \varrho_0 = 1 : \frac{dy}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

woraus nach (9) §. 246:

$$p : p_0 = 1 : \left(\frac{dy}{dx}\right)^\gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wenn man voraussetzt, dass die Ausdehnungen und Verdichtungen nach dem adiabatischen Gesetz vor sich gehen. Die Masse der Flächeneinheit der Schicht ist $\varrho_0\,dx$, die entsprechende bewegende Kraft $-\frac{dp}{dx}dx$. Daraus erhalten wir als Bewegungsgleichung:

$$\varrho_0 \frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{d p}{d x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Zwischen (2) und (3) ist p zu eliminiren. Das Resultat lautet:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\gamma+1} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{p_0 \gamma}{\varrho_0} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Gleichung (4) ist eine exacte Gleichung, welche die wirkliche Abscisse y in Werthen der Gleichgewichtsabscisse x und der Zeit t ausdrückt. Wird die Bewegung klein angenommen, so können wir $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\gamma+1}$, welches als der Coefficient der kleinen Grösse $\frac{d^2 y}{dt^2}$ auftritt, durch den angenäherten Werth „Eins" ersetzen. Dann wird (4):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{p_0 \gamma}{\varrho_0} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

die gewöhnliche angenäherte Gleichung.

Geht die Ausdehnung nach einer Isothermen vor sich, wie nach der Newton'schen Theorie, so werden die (4) und (5) entsprechenden Gleichungen einfach dadurch erhalten, dass man $\gamma = 1$ setzt.

Welches auch die Beziehung zwischen p und ϱ sein mag, die von der Constitution des Mediums abhängt, stets lautet nach (1) und (3) die Bewegungsgleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dp}{d\varrho} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

woraus das in $\frac{dp}{d\varrho}$ auftretende ϱ mittelst der in (1) ausgedrückten Relation zwischen ϱ und $\frac{dy}{dx}$ zu eliminiren ist.

250. Wir haben bei den bisherigen Untersuchungen der Luftwellen vorausgesetzt, dass die Luft, abgesehen von der durch die Schallschwingungen hervorgerufenen Bewegung, sich in Ruhe befindet. Wir können aber natürlich der ganzen in Betracht gezogenen Luftmasse irgend eine beliebige gemeinsame Bewegung ertheilen. Nehmen wir an, dass sich

die Luft in einer der der Wellen entgegengesetzten Richtung bewegt, und mit derselben wirklichen Geschwindigkeit wie jene, so ändert die Wellenform, wenn sie permanent ist, ihre Stellung im Raume nicht und die Bewegung ist eine stationäre. Wir wollen nun in diesem Capitel das Problem unter dieser Voraussetzung erforschen, da es von Wichtigkeit ist, in unseren Gedanken alle mögliche Klarheit über den Mechanismus der Fortpflanzung von Wellen zu erhalten.

Es mögen u_0, p_0, ϱ_0 resp. Geschwindigkeit, Druck und Dichtigkeit des Fluidums in seinem ungestörten Zustande darstellen; u, p, ϱ seien die entsprechenden Grössen in einem Punkt der Welle. Wir haben für die Continuitätsgleichung:

$$\varrho u = \varrho_0 u_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

und nach (5) §. 244 für die Gleichung der Energie:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{2} u_0^2 - \frac{1}{2} u^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Durch Elimination von u erhalten wir:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{2} u_0^2 \left(1 - \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Diese Gleichung giebt also für den Druck das Gesetz an, unter welchem allein es für eine stationäre Welle möglich ist, sich in einem mit der Geschwindigkeit u_0 bewegenden Fluidum zu erhalten. Aus (3) folgt:

$$\frac{dp}{d\varrho} = u_0^2 \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

oder

$$p = \text{constant} - \frac{u_0^2 \varrho_0^2}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Da die Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit bei den wirklichen Gasen nicht die in (5) ausgedrückte ist, so schliessen wir, dass eine sich selbst aufrecht erhaltende stationäre Luftwelle eine Unmöglichkeit ist, welches auch die Geschwindigkeit u_0 des allgemeinen Luftstromes sei; oder in anderen Worten: eine Welle kann bei ihrer Fortpflanzung

ihre relative Lage den ungestörten Gastheilen gegenüber nicht ändern ohne eine Aenderung des Typus zu erleiden. Nichtsdestoweniger kann, wenn die betrachteten Dichtigkeitsänderungen klein sind, (5) angenähert erfüllt werden; wir sehen aus (4), dass die Geschwindigkeit des Luftstromes, der, um die Welle stationär zu erhalten, nothwendig ist, gegeben wird durch:

$$u_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

welches dieselbe ist, wie die relative Geschwindigkeit der Welle dem ruhenden Fluidum gegenüber.

Die Art und Weise, das vorliegende Problem zu behandeln, zeigt vielleicht klarer, wie irgend eine andere, die Natur der Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Verdichtung §. 245 (3), (4). Bei einer stationären Wellenform ist nach dem Principe der Energie eine Vergrösserung der Dichtigkeit von einem Verlust an Geschwindigkeit begleitet; daher bewegt sich das die verdichteten Theile einer Welle enthaltende Fluidum langsamer vorwärts, wie die nicht verdichteten Theile. In Bezug auf das Fluidum geht daher die Bewegung der verdichteten Theile in derselben Richtung vor sich, in welcher sich die Wellen fortpflanzen.

Wenn die Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit eine andere wie die in (5) ausgedrückte ist, so kann eine stationäre Welle nur mit Hülfe einer äusseren Kraft aufrecht erhalten werden. Nach (1) und (2) §. 237 haben wir unter der Annahme, dass die Bewegung stationär ist:

$$X = u\frac{du}{dx} + \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

während die Beziehung zwischen u und ϱ durch (1) gegeben wird. Setzen wir voraus, dass $p = a^2\varrho$, so wird (7):

$$X = (u^2 - a^2)\frac{d \log u}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

welche Gleichung zeigt, dass eine äussere Kraft überall da nothwendig ist, wo u variabel und von a verschieden.

251. Der Grund zu der Aenderung in dem Schwingungstypus, welche eintritt, wenn eine Welle sich selbst überlassen wird, ist unschwer einzusehen. Aus der gewöhnlichen Theorie wissen wir, dass eine unendlich kleine Störung sich mit einer gewissen Geschwindigkeit a fortpflanzt, welche den Theilen des Mediums gegenüber durch die Welle nicht alterirt wird. Wir wollen eine so lange Welle ins Auge fassen, dass die Aenderungen in der Geschwindigkeit und Dichte für eine beträchtliche Distanz längs derselben unmerklich sind; dann wollen wir uns denken, dass eine kleine zweite Welle sich an einem Orte, wo die Geschwindigkeit (u) der ersteren endlich ist, über diese lagert. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die zweite Welle durch das Medium fortpflanzt, ist a; wegen der localen Bewegung des Mediums selbst ist aber die ganze fortschreitende Geschwindigkeit $a + u$ und hängt von den Theilen der langen Welle ab, bei denen die kleine Welle eintritt. Was nun eben von einer zweiten Welle gesagt wurde, findet auch auf die Theile der langen Welle selbst Anwendung; hieraus schliessen wir, dass nach Verlauf einer Zeit t der Ort, wo sich eine gewisse Geschwindigkeit u findet, von seinem ursprünglichen Platz um eine Strecke vorgerückt ist, die nicht gleich at, sondern gleich $(a + u)t$ ist; oder es ist, wie wir uns auch ausdrücken können, u mit einer Geschwindigkeit $a + u$ fortgepflanzt. In symbolischer Bezeichnungsweise ist $u = f\{x + (a + u)t\}$, wo f eine willkürliche Function bedeutet, eine Gleichung, welche zuerst von Poisson[1]) aufgestellt wurde.

Aus dem eben benutzten Argument könnte es auf den ersten Blick erscheinen, dass eine Aenderung in dem Schwingungstypus ein nothwendiges Vorkommen bei dem Vorwärtsschreiten einer Welle sei, unabhängig von irgend einer particulären Voraussetzung über die Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit; und doch wurde im §. 250 nachgewiesen, dass bei einem speciellen Gesetz über den Druck keine Aen-

[1]) Mémoire sur la Théorie du Son. Journal de l'école polytechnique, t. VII, p. 319. 1808.

derung in dem Schwingungstypus eintritt. Wir haben indessen in diesem Abschnitt stillschweigend angenommen, dass a constant ist, welches einer Beschränkung auf das Boyle'sche Gesetz gleichkommt. Bei jedem anderen Gesetz über den Druck ist $\sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)}$ eine Function von ϱ, und daher auch, wie wir gleich sehen werden, von u. Bei dem in (5) §. 250 ausgedrückten Gesetz ist die Beziehung zwischen u und ϱ für eine fortschreitende Welle der Art, dass $\sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)}+u$ eine Constante ist, wobei am Vorrücken wegen der auf Grund der vergrösserten Dichtigkeit eintretenden Verlangsamung im Vorwärtsschreiten ebenso viel verloren, als durch die Ueberlagerung der Geschwindigkeit u gewonnen wird.

So weit nur die Constitution des Mediums selbst in Betracht kommt, ist nichts vorhanden, was uns hindern könnte, sowohl u wie ϱ willkürliche Werthe vorzuschreiben; bei einer fortschreitenden Welle muss aber eine Relation zwischen diesen beiden Grössen erfüllt werden. Wir wissen schon (§. 245), dass dieses der Fall, wenn die Störung klein ist. Der folgende Beweis wird aber nicht allein zeigen, dass eine solche Beziehung auch dann zu erwarten ist, wenn das Quadrat der Bewegung zurückbehalten werden muss, sondern wird sogar die Form dieser Beziehung bestimmen.

Welches auch das Druckgesetz sein mag, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von kleinen Störungen ist nach §. 245 gleich $\sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)}$, und die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Verdichtung bei einer positiven fortschreitenden Welle lautet:

$$u : s = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Ist diese Beziehung an irgend einem Punkte verletzt, so wird eine Welle entstehen, welche in der negativen Richtung vorwärts eilt. Wir wollen uns nun den Fall einer positiven fortschreitenden Welle vorstellen, bei welcher die Aenderungen in der Geschwindigkeit und Dichte sehr allmälig vor sich

gehen, aber doch durch ihre Anhäufung von Einfluss werden. Wir wollen dann untersuchen, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, um die Bildung einer negativen Welle zu verhüten. Es ist klar, dass die Antwort auf die Frage, ob in einem Punkte eine negative Welle entsteht oder nicht, von dem Zustand der Dinge in der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Punktes abhängt und nicht von dem Zustand der Dinge an entfernteren Punkten. Daher wird sie durch das auf kleine Störungen anwendbare Kriterium bestimmt werden. Um dieses Kriterium anzuwenden, haben wir die Geschwindigkeiten und Verdichtungen nicht ihrer absoluten Grösse nach, sondern in ihren relativen Grössen den in den benachbarten Theilen des Mediums herrschenden gegenüber zu nehmen, so dass die für unseren gegenwärtigen Zweck geeignete Form von (1) ist:

$$du = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2);$$

woraus:

$$u = \int \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

welches die von einer positiven fortschreitenden Welle zu erfüllende Relation zwischen u und ϱ giebt. Gleichung (2) wurde analytisch von Earnshaw[1]) abgeleitet.

Beim Boyle'schen Gesetz ist $\sqrt{\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)}$ constant; dann ist die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Dichte, welche zuerst, wie ich glaube, von Helmholtz[2]) abgeleitet wurde:

$$u = a \log \frac{\varrho}{\varrho_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

wenn ϱ_0 die $u = 0$ entsprechende Dichtigkeit ist.

In diesem Falle macht es uns Poisson's Integral möglich, eine bestimmte Vorstellung von der Aenderung im Schwingungstypus zu bilden, welche die ersten Stadien des

---

[1]) Phil. Trans. 1859, p. 146.

[2]) Fortschritte der Physik, IV, p. 106. 1852.

Vorschreitens der Welle begleitet; schliesslich führt es uns dann zu einer Schwierigkeit, welche bis jetzt noch nicht überwunden ist [1]). Ziehen wir zur Darstellung der Vertheilung der Geschwindigkeit eine Curve, indem wir x als Abscisse und u als Ordinate nehmen, so können wir die dieser nach Verlauf einer Zeit t entsprechende Curve durch folgende Construction finden. Durch irgend einen Punkt der ursprünglichen Curve ziehe man eine gerade Linie in der positiven Richtung parallel zu x und von der Länge $(a + u)\,t$ oder, wenn wir uns nur um die Gestalt der Curve kümmern, von der Länge ut. Der geometrische Ort der Enden dieser Linien ist die Curve der Geschwindigkeit nach einer Zeit t.

Indessen kann diese Ableitung nicht unbegrenzt gültig sein. Die Erhebungen der Geschwindigkeitscurve eilen den Senkungen continuirlich voraus und müssen dieselben schliesslich überholen. Nachdem dieses eingetreten ist, würde die Curve zwei Werthe von u für einen Werth von x angeben, und dann aufhören, irgend etwas darzustellen, was wirklich eintreten kann. Thatsächlich steht es uns nicht frei, die Anwendung des Integrals über den Punkt fortzusetzen, wo die Geschwindigkeit discontinuirlich wird, also wo die Geschwindigkeitscurve eine verticale Tangente hat. Um den Punkt zu finden, wo dieses eintritt, wollen wir zwei Punkte in der Nachbarschaft irgend eines Theiles der Curve nehmen, der sich nach unten in der positiven Richtung neigt, und aufsuchen, nach welcher Zeit dieser Theil der Curve vertical wird. Ist die Differenz der Abscissen dx, so wird der hintere Punkt den vorderen in der Zeit $dx : (-\,du)$ einholen. Daher wird die Bewegung, wie sie durch Poisson's Gleichung bestimmt ist, nach einer Zeit discontinuirlich, welche gleich dem reciproken Werth, positiv genommen, des grössten negativen Werthes von $\frac{du}{dx}$ ist.

Wir wollen z. B. annehmen, dass:

---

[1]) Stokes, „On a difficulty in the Theory of Sound." Phil. Mag. Nov. 1848.

$$u = U \cos \frac{2\pi}{\lambda} \{x - (a + u)t\}$$

ist, worin U die grösste Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Wenn $t = 0$, so ist der grösste negative Werth von $\frac{du}{dx}$ gleich $-\frac{2\pi}{\lambda} U$, so dass Discontinuität zur Zeit $t = \lambda : 2\pi U$ beginnen wird.

Tritt Discontinuität ein, so ist ein Zustand der Dinge vorhanden, auf welchen die gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht anwendbar sind; das darauf folgende Vorschreiten der Bewegung ist noch nicht bestimmt worden. Es ist, wie von Stokes vermuthet wird, wahrscheinlich, dass eine Art von Reflexion erfolgt. In Hinsicht auf solche Fragen müssen wir sorgfältig rein mathematische Fragen von physikalischen unterscheiden. In der Praxis haben wir mit sphärischen Wellen zu thun, deren Divergenz von selbst hinreicht, die Neigung zur Discontinuität zu hindern. Bei wirklichen Gasen ist es auch sicher, dass, bevor Discontinuität eintreten kann, das Druckgesetz seine Form zu ändern anfangen würde und dass der Einfluss der Viscosität dann nicht länger vernachlässigt werden kann. Diese letzteren Betrachtungen haben aber nichts mit dem mathematischen Problem zu thun, was aus Wellen von endlicher Amplitude wird in einem von Viscosität freien Medium, dessen Druck unter allen Umständen seiner Dichtigkeit genau proportional bleibt; und dieses Problem ist noch nicht gelöst worden.

Es ist bemerkenswerth, dass, obgleich wir uns natürlich die Existenz einer Welle mit endlicher Störung zu jedem Momente denken können, doch eine Grenze in der Dauer ihrer vorhergehenden unabhängigen Existenz vorhanden ist. Ziehen wir Linien nach der negativen, statt nach der positiven Richtung, so können wir in dieser Weise die Geschichte der Geschwindigkeitscurve aufzeichnen. Wir sehen, dass, wenn wir unsere Untersuchung weiter und weiter zurücktreiben, die vorderen Abdachungen sanfter und die hinteren Abdachungen der Curve steiler werden. Zu einer Zeit, gleich dem grössten posi-

tiven Werth von $\frac{dx}{du}$, vor der Zeit, wo die Curve zuerst in Betracht gezogen wurde, wird die Geschwindigkeit discontinuirlich sein.

252. Die vollständige Integration der exacten Gleichungen (4) und (6) §. 249 wurde für eine fortschreitende Welle zuerst von Earnshaw[1]) ausgeführt. Er fand Gründe zu der Annahme, dass bei einer Schallwelle die Gleichung:

$$\frac{dy}{dt} = F\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

stets erfüllt sein muss, und bemerkte dabei, dass das Resultat der Differentiation von (1) nach t, d. i.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left\{F'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}^2 \frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

mit Hülfe der willkürlichen Function F zum Uebereinstimmen mit jeder dynamischen Gleichung gebracht werden kann, in welcher das Verhältniss von $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in Werthen von $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt ist. Hat man so die Form der Function F bestimmt, dann kann die Lösung durch den gewöhnlichen auf solche Fälle anwendbaren Process vervollständigt werden[2]).

Schreiben wir der Kürze halber α für $\frac{dy}{dx}$, so haben wir:

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx + \frac{dy}{dt}\,dt = \alpha\,dt + F(\alpha)\,dt;$$

das Integral lässt sich finden, indem wir α zwischen den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y = \alpha x + F(\alpha)t + \varphi(\alpha) \\ 0 = \quad x + F'(\alpha)t + \varphi'(\alpha) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

eliminiren, worin α gleich $\varrho_0 : \varrho$ und φ eine willkürliche Function ist.

---

[1]) Proceedings of the Royal Society, Jan. 6, 1859. Phil. Trans. 1860, p. 133.

[2]) Boole's Differential Equations, Ch. XIV.

Ist $p = a^2 \varrho$, so lautet die exacte Gleichung (6 §. 249):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Durch Vergleichung dieser mit (2) sehen wir, dass:

$$F'(\alpha) = \frac{\pm a}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

oder nach der Integration:

$$F(\alpha) = C \pm a \log \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

wie wir auch aus (4) §. 251 hätten schliessen können. Die Constante C verschwindet, wenn $F(\alpha)$, d. i. u, für $\alpha = 1$ oder $\varrho = \varrho_0$ verschwindet; sonst stellt sie eine Geschwindigkeit des Mediums als Ganzes dar, welche mit der Welle als solcher nichts zu thun hat. Für eine positive fortschreitende Welle ist das untere der beiden Zeichen zu nehmen. Daher haben wir an Stelle von (3):

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha x - a \log \alpha t + \varphi(\alpha) \\ 0 &= \alpha x - at \quad + \alpha \varphi'(\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

und

$$u = - a \log \alpha = a \log \frac{\varrho}{\varrho_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Ziehen wir die zweite der Gleichungen (7) von der ersten ab, so erhalten wir:

$$y - at + at \log \alpha = \varphi(\alpha) - \alpha \varphi'(\alpha),$$

woraus wir nach (8) sehen, dass $y - (a + u)t$ eine willkürliche Function von α oder von u ist. Umgekehrt ist also u eine willkürliche Function von $y - (a + u)t$ und wir können somit schreiben:

$$u = f\{y - (a + u)t\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Gleichung (9) ist Poisson's Integral, welches wir in dem vorhergehenden Abschnitt betrachteten; dort hatte das Symbol x dieselbe Bedeutung, wie hier y.

253. Das Problem von endlichen Wellen, von endlicher Amplitude zog auch die Aufmerksamkeit von Riemann auf

sich, dessen Arbeit am 28. November 1859 [1]) der Königlichen Gesellschaft zu Göttingen mitgetheilt wurde. Riemann's Untersuchung gründet sich auf die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen, welche in §§. 237, 238 untersucht wurden, und ist nicht auf ein bestimmtes Druckgesetz beschränkt. Um aber die Besprechung dieses Theiles unseres Themas, welches vielleicht schon länger als es seine physikalische Wichtigkeit verlangen würde, behandelt ist, nicht ungebührlich auszudehnen, wollen wir uns auf den Fall, wo das Boyle'sche Druckgesetz Gültigkeit hat, beschränken.

Wenden wir die Gleichungen (1) und (2) des §. 237 und (1) des §. 238 auf die Umstände des vorliegenden Problems an, so erhalten wir:

$$\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} = -a^2 \frac{d\log\varrho}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$\frac{d\log\varrho}{dt} + u\frac{d\log\varrho}{dx} = -\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Multipliciren wir (2) mit $\pm a$ und addiren nachher das Produkt zu (1), so ergiebt sich:

$$\frac{dP}{dt} = -(u+a)\frac{dP}{dt}, \quad \frac{dQ}{dt} = -(u-a)\frac{dQ}{dx} \quad \ldots \quad (3),$$

worin:

$$P = a\log\varrho + u, \quad Q = a\log\varrho - u \quad \ldots \quad (4).$$

Daher ist:

$$dP = \frac{dP}{dx}\{dx - (u+a)dt\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

$$dQ = \frac{dQ}{dx}\{dx - (u-a)dt\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Diese Gleichungen sind darin allgemeiner, wie die von Poisson und Earnshaw, dass sie nicht auf den Fall einer einzelnen fortschreitenden positiven oder negativen Welle be-

---

[1]) Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Göttingen. Abhandlungen, t. VIII. 1860. Man vergleiche auch einen ausgezeichneten Auszug in den Fortschritten der Physik, XV, p. 123.

schränkt bleiben. Aus (5) sehen wir, dass, welches auch der Werth von P sein mag, welcher dem Punkte x zur Zeit t entspricht, derselbe Werth von P dem Punkte $x + (u + a)\,dt$ zur Zeit $t + dt$ entspricht; auf dieselbe Weise ergiebt sich aus (6), dass Q ungeändert bleibt, wenn x und t die Zuwachse von resp. $(u - a)\,dt$ und dt erhalten. Sind P und Q zu einem gewissen Zeitmoment als Functionen von x und sind ebenso die sie darstellenden Curven gegeben, so können wir den entsprechenden Werth von u aus (4) ableiten und dann, wie in §. 251, die Curven, welche die Werthe von P und Q nach dem Verlauf des kleinen Zeitintervalles dt darstellen, construiren. Aus der Gestalt dieser Curven erhält man wieder die neuen Werthe von u und ϱ; der Process kann darauf wiederholt werden.

Das Fluidumelement, zu dem die Werthe von P und Q zu irgend einem Momente zugehören, bewegt sich selbst mit der Geschwindigkeit u, so dass die Geschwindigkeiten von P und Q, relativ zu dem Element gerechnet, numerisch dieselben und gleich a sind, wobei die von P nach der positiven Richtung und die von Q nach der negativen Richtung geht.

Wir sind nun in der Lage, die Folgen einer anfänglichen Störung anzugeben, welche auf einen endlichen Theil des Mediums, etwa den zwischen $x = \alpha$ und $y = \beta$ liegenden, beschränkt ist. Ausserhalb dieses Theiles soll das Medium in Ruhe sein und seine normale Dichte haben, so dass die Werthe von P und Q gleich $a \log \varrho_0$ sind. Jeder Werth von P pflanzt sich selbst der Reihe nach auf die Elemente des Fluidums fort, welches vor ihm liegt, und jeder Werth von Q auf das, welches hinter ihm liegt. Die hintere Grenze der Region, in welcher P variabel ist, d. i. die Stelle, wo P zuerst den constanten Werth $a \log \varrho_0$ erreicht, kommt zuerst mit den veränderlichen Werthen von Q in Berührung und bewegt sich demgemäss mit einer variablen [1]) Geschwindigkeit weiter. Zu einer gewissen Zeit,

---

[1]) An diesem Punkte scheint sich ein Irrthum in Riemann's Arbeit eingeschlichen zu haben, der in dem Auszug der Fortschritte der Physik berichtigt ist.

welche zu ihrer Bestimmung eine Lösung der Differentialgleichungen erfordert, begegnet die hintere (links liegende) Grenze der Region, in welcher P variabel ist, der hinteren (rechts liegenden) Grenze der Region, in welcher Q variirt. Nach diesem Zeitmomente trennen sich die beiden Regionen und schliessen zwischen sich einen in seiner Gleichgewichtsbedingung befindlichen Theil des Fluidums ein, wie aus der Thatsache hervorgeht, dass die Werthe von P und Q beide gleich $a \log \varrho_0$ sind. Bei der positiven Welle hat Q den constanten Werth $a \log \varrho_0$, so dass $u = a \log \frac{\varrho}{\varrho_0}$ wie in (4) §. 251; bei der negativen Welle hat P denselben constanten Werth und giebt als Beziehung zwischen u und ϱ, $u = - a \log \frac{\varrho}{\varrho_0}$. Da bei jeder fortschreitenden Welle, wenn dieselbe isolirt ist, ein Gesetz herrscht, welches u und ϱ verbindet, so sehen wir, dass bei der positiven Welle du mit dP verschwindet, und bei der negativen Welle du mit dQ. Daher lernen wir aus (5), dass bei einer positiven fortschreitenden Welle du verschwindet, wenn die Zuwachse von x und t der Art sind, dass der Gleichung $dx - (u + a) dt = 0$ genügt wird, woraus Poisson's Integral unmittelbar folgt.

Es würde uns zu weit führen, wenn wir die analytische Entwickelung der Riemann'schen Methode weiter verfolgen wollten. Ich verweise den Leser in Betreff derselben auf die Originalarbeit. Indessen würde es nicht richtig sein, stillschweigend einen Irrthum in Betreff der discontinuirlichen Bewegung zu übergehen, den Riemann und andere Schriftsteller begangen haben. Es ist behauptet worden, dass ein Bewegungszustand möglich sei, bei welchem das Fluidum durch eine Discontinuitätsfläche in zwei Theile getheilt wird, welche letztere sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzt. Dabei soll das ganze Fluidum sich auf der einen Seite der Discontinuitätsfläche in einem in Bezug auf Dichte und Geschwindigkeit bestimmten gleichförmigen Zustand befinden und auf der andern Seite ebenso in einem andern in derselben Hinsicht gleichförmigen Zustand. Wenn aber diese Bewegung

möglich wäre, so würde auch eine Bewegung möglich sein, bei welcher die Discontinuitätsfläche ruhig an derselben Stelle bleibt. Das folgt direct, wenn wir uns denken, dass der ganzen Masse des Fluidums eine Geschwindigkeit ertheilt wird, welche gleich una entgegensetzt derjenigen ist, mit der die Discontinuitätsfläche sich zuerst vorwärts bewegt. Um die Beziehungen zu finden, welche zwischen der Geschwindigkeit und Dichte auf der einen Seite (u_1, ϱ_1) und der Geschwindigkeit und Dichte auf der andern Seite (u_2, ϱ_2) herrschen, bemerken wir zunächst, dass nach dem Princip der Erhaltung der Materie $\varrho_2 u_2 = \varrho_1 u_1$ sein muss. Anderenseits sehen wir, wenn wir die Bewegungsmenge einer von parallelen Flächen eingeschlossenen und die Discontinuitätsfläche einschliessenden Schicht ins Auge fassen, dass die Bewegungsmenge, welche die Flächeneinheit in der Zeiteinheit verlässt, gleich $(\varrho_2 u_1 = \varrho_1 u_1) u_2$ ist, während die eintretende Bewegungsmenge $\varrho_1 u_1^2$ beträgt. Der Unterschied in diesen Bewegungsmengen muss durch die auf die Grenzen der Schicht wirkenden Drucke ausgeglichen werden, so dass:

$$\varrho_1 u_1 (u_2 - u_1) = p_1 - p_2 = a^2 (\varrho_1 - \varrho_2),$$

woraus:

$$u_1 = a \sqrt{\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}, \qquad u_2 = a \sqrt{\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)} \quad . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Die so bestimmte Bewegung ist indessen nicht möglich; sie genügt allerdings den Bedingungen in Bezug auf Masse und Bewegungsmenge. Sie verletzt aber die durch die Gleichung:

$$\frac{1}{2} u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2 = a^2 \log \varrho_1 - a^2 \log \varrho_2 \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

ausgedrückte Energiebedingung (§. 244).

Dieses Argument wurde schon in einer andern Form in §. 250 gegeben. Der letztere Paragraph würde uns schon allein das Recht geben, die oben behauptete Bewegung als irrig zurückzuweisen, da aus ihm hervorgeht, dass keine stationäre Bewegung möglich ist, wenn nicht das dort bestimmte Dichtigkeitsgesetz erfüllt wird. Aus Gleichung (8) jenes Abschnittes

können wir finden, welche äusseren Kräfte nöthig sein würden, um die durch (7) definirte Bewegung aufrecht zu erhalten. Es ergiebt sich, dass die Kraft X, wenn auch auf die Stelle der Discontinuität beschränkt, aus zwei Theilen von entgegengesetzten Zeichen besteht, da nach (7) u durch den Werth a hindurchgeht. Die ganze bewegende Kraft, d. i. $\int X\varrho\,dx$, verschwindet, und das erklärt, wie es kommt, dass die die Bewegungsmenge betreffende Bedingung durch (7) erfüllt wird, wenn man auch die Kraft X ganz ignorirt.

254. Die genaue experimentelle Bestimmung der Geschwindigkeit des Schalles ist mit grösseren Schwierigkeiten verbunden, als man erwarten sollte. Beobachtungen in freier Luft sind wegen der Wirkungen des Windes und wegen der Unsicherheit in Hinsicht auf die genaue Zustandsbedingung der Atmosphäre in Betreff Temperatur und Feuchtigkeit Fehlerquellen unterworfen. Auf der andern Seite treten, wenn der Schall sich in Luft fortpflanzt, die in Röhren eingeschlossen ist, Störungen aus der Reibung und der Wärmeübertragung ein. Und dann ist es, wenn auch aus diesen Quellen bei Röhren von grossem Durchmesser, wie die von Regnault gebrauchten, keine grossen Fehler zu befürchten sind, schwierig, sicher darüber zu sein, ob die ideale ebene Welle der Theorie genau genug verwirklicht ist.

Die folgende Tabelle [1]) enthält eine Liste der hauptsächlichsten experimentellen Bestimmungen, die bis jetzt gemacht worden sind.

Namen der Beobachter.	Geschwindigkeit des Schalles bei 0° Cent. in Meter.
Académie des Sciences (1738)	332
Benzenberg (1811)	333,7 332,3
Goldingham (1821)	331,1
Bureau des Longitudes (1822)	330,6

---

[1]) Bosanquet, Phil. Mag. April 1877.

Namen der Beobachter.	Geschwindigkeit des Schalles bei 0° Cent. in Meter.
Moll und van Beek	332,2
Stampfer und Myrback	332,4
Bravais und Martins (1844)	332,4
Wertheim	331,6
Stone (1871)	332,4
Le Roux	330,7
Regnault	330,7

Bei Stone's Versuchen [1] lag der Anfang der Strecke, auf welcher die Geschwindigkeit des Schalles gemessen wurde, in einer Entfernung von 640 Fuss von der Schallquelle, so dass jeder Irrthum, welcher aus übermässig grossen Luftbewegungen entstehen würde, zum grossen Theil vermieden war.

Bosscha [2] hat eine Methode zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Schalles vorgeschlagen, bei welcher keine grossen Entfernungen benutzt werden. Sie hängt von der Genauigkeit ab, mit welcher das Ohr im Stande ist, zu entscheiden, ob kurze Schläge gleichzeitig sind oder nicht. Bei König's [3] Versuchsanordnung sind zwei kleine elektro-magnetische Schlagwerke durch einen Stimmgabelunterbrecher (§. 64), dessen Periode ein Zehntel einer Secunde ist, controllirt, und geben synchrone Schläge von derselben Periode. Sind die Schlagwerke nahe bei einander, so fallen die hörbaren Schläge zusammen; sowie aber das eine Werk allmälig vom Ohre entfernt wird, fallen die beiden Reihen von Schlägen aus einander. Ist der Unterschied der Entfernungen ungefähr 34 Meter, so tritt wieder Coincidenz ein, ein Beweis dafür, dass 34 Meter ungefähr die Distanz ist, welche durch einen Schall in dem zehnten Theil einer Secunde zurückgelegt wird.

---

[1] Phil. Trans. 1872, p. 1.

[2] Pogg. Ann. XCII, 486. 1854.

[3] Ebend. CXVIII, 610. 1863.

Zwölftes Capitel.

Schwingungen in Röhren.

255. Wir haben schon (§. 245) die Lösung unserer Fundamentalgleichung für den Fall betrachtet, wo das Geschwindigkeitspotential in einem unbegrenzten Fluidum durch eine Function von einer Raumcoordinate allein gegeben wird. Wenn keine Reibung vorhanden ist, so wird durch die Einführung irgend einer Anzahl von festen cylindrischen Flächen, deren erzeugende Linien parallel der eben genannten Coordinate sind, keine Aenderung bewirkt; denn das Fluidum hat auch, wenn diese Flächen nicht da sind, kein Bestreben, sich senkrecht zu denselben zu bewegen. Ist nun eine der cylindrischen Flächen geschlossen (in Bezug auf ihren Querschnitt nämlich), so haben wir das wichtige Problem einer axialen Bewegung der Luft im Innern einer cylindrischen Pfeife, welche, wenn einmal die mechanischen Bedingungen an den Enden der Pfeife gegeben sind, unabhängig von Allem ist, was sich ausserhalb der Pfeife ereignet.

Nehmen wir eine einfache harmonische Schwingung, so wissen wir (§. 245), dass, wenn φ wie e^{int} variirt:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varkappa^2\varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

worin:

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Die Lösung kann in zwei Formen geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= (A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x)\, e^{int} \\ \varphi &= (A e^{i\varkappa x} + B e^{-i\varkappa x})\, e^{int}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

wovon schliesslich nur die reellen Theile zurückbehalten werden. Die erste Form ist zweckmässiger, wenn die Schwingung ganz oder wenigstens nahezu stationär ist, und die zweite, wenn die Bewegung sich auf eine positive oder negative fortschreitende Wellenbewegung reducirt. Die Constanten A und B in der symbolischen Lösung können complex sein, und daher enthält der schliessliche Ausdruck mit nur reellen Grössen vier willkürliche Constanten. Wollen wir überhaupt nur reelle Grössen benutzen, so müssen wir setzen:

$$\begin{aligned}\varphi &= (A \cos \varkappa x) + B \sin \varkappa x) \cos nt \\ &\quad + (C \cos \varkappa x + D \sin \varkappa x) \sin nt \quad \ldots\ldots \quad (4),\end{aligned}$$

die erforderliche analytische Arbeit würde dann aber im Allgemeinen grösser sein. Wenn keine Zweideutigkeit daraus entstehen kann, so wollen wir manchmal der Kürze halber den Factor, welcher die Zeit enthält, weglassen oder wieder einführen, ohne jedes Mal dieses besonders zu erwähnen. Gleichungen wie (1) sind natürlich gleich richtig, ob der Factor mit beachtet wird oder nicht.

Nehmen wir die erste Form von (3), so haben wir:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \quad A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x \\ \frac{d\varphi}{dx} &= -\varkappa A \sin \varkappa x + \varkappa B \cos \varkappa x\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Sind irgend welche Punkte vorhanden, in denen φ oder $\frac{d\varphi}{dx}$ permanent Null sind, so muss das Verhältnisse $A : B$ reell sein und dann ist die Schwingung stationär, das ist, alle Punkte befinden sich gleichzeitig in derselben Phase.

Wir wollen annehmen, dass im Anfangspunkte ein Knotenpunkt ist. Dann verschwindet, wenn $x = 0$, auch $\frac{d\varphi}{dx}$; die Bedingung hierfür ist $B = 0$. Daher:

$$\varphi = A \cos \varkappa x e^{int}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\varkappa A \sin \varkappa x e^{int} \ldots (6),$$

woraus, wenn $Pe^{i\vartheta}$ für A gesetzt und der imaginäre Theil fortgelassen wird, folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \quad P \cos \varkappa x \cos (nt + \vartheta) \\ \frac{d\varphi}{dx} &= -\varkappa P \sin \varkappa x \cos (nt + \vartheta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (7).$$

Aus diesen Gleichungen sehen wir, dass $\frac{d\varphi}{dx}$ immer dort verschwindet, wo $\sin \varkappa x = 0$ ist; d. h., dass ausser in dem Anfangspunkte noch in den Punkten $x = \frac{1}{2} m \lambda$, wo λ irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, Knotenpunkte vorhanden sind. An einer jeden dieser Stellen können unendlich dünne Barrieren normal zu x quer durch die Röhre gespannt werden, ohne die Bewegung in irgend einer Weise zu beeinflussen. Mitten zwischen jedem Paar aufeinanderfolgender Knotenpunkte ist ein Bauch oder eine Stelle, wo keine Druckänderung stattfindet, da $\delta p = -\varrho \dot{\varphi}$ (6), §. 244. Bei jedem dieser Bäuche kann eine Verbindung mit der äusseren Atmosphäre hergestellt werden, ohne eine Störung der Bewegung durch ein- oder ausströmende Luft zu veranlassen. Die Bäuche sind die Orte der grössten Geschwindigkeit, und die Knotenpunkte die der grössten Druckänderung. In Intervallen von der Grösse λ wiederholt sich Alles genau.

Ist bei $x = l$ ein Knotenpunkt, so ist ebenso gut wie im Anfangspunkte $\sin \varkappa l = 0$ oder $\lambda = 2l : m$, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet. Der tiefste Ton, der durch die in einer doppelt geschlossenen Pfeife von der Länge l enthaltene Luft angegeben werden kann, ist daher derjenige, welcher eine Wellenlänge gleich $2l$ hat. Dieser Satz hat, wie wohl zu bemerken ist, Gültigkeit, welches auch das Gas sein mag, mit dem die Röhre angefüllt ist; die Schwingungszahl oder die Stelle des Tons in der musikalischen Scala hängt aber auch von der Natur des einzelnen Gases ab. Die Schwingungsdauer wird durch:

$$\tau = \frac{\lambda}{a} = \frac{2l}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

gegeben. Die übrigen bei einer doppelt geschlossenen Pfeife möglichen Töne haben Perioden, die Submultipeln von der des tiefsten Tones sind; das ganze System bildet eine harmonische Scala.

Wir wollen nun annehmen, dass statt eines Knotenpunktes im Punkte $x = l$ ein Bauch liegt, ohne uns aber augenblicklich mit der Untersuchung aufzuhalten, wie solch eine Zustandsbedingung aufrecht erhalten werden kann. Gleichung (6) giebt $\cos \varkappa l = 0$, woraus $\lambda = 4l : (2m + 1)$; m ist hier Null oder eine positive ganze Zahl. In diesem Falle hat der tiefste Ton eine Wellenlänge, die gleich dem Vierfachen der Länge der Pfeife ist, die Länge von dem Knotenpunkt bis zum Schwingungsbauch gerechnet. Die anderen Töne bilden mit dem tiefsten Ton eine harmonische Scala, aus der indessen alle Glieder von gerader Ordnung weggefallen sind.

256. Mittelst einer festen Barriere kann man ohne Schwierigkeit in jedem gewünschten Punkt einer Pfeife einen Knotenpunkt herstellen; dagegen lässt sich die Bedingung für einen Bauch, d. i. die Bedingung, dass an dem betreffenden Ort der Druck unter keinen Umständen variiren soll, nur angenähert verwirklichen. In den meisten Fällen kann die Druckänderung in irgend einem Punkt der Pfeife dadurch klein gemacht werden, dass man dort eine freie Verbindung mit der äussern Luft herstellt. Daher nahmen Euler und Lagrange an, dass Constanz des Druckes die an dem Ende einer offenen Pfeife zu erfüllende Bedingung ist. Wir wollen später zu diesem Problem der offenen Pfeife zurückkehren und auf strenge Weise die an dem Ende zu erfüllende Bedingung aufsuchen. Für unsern augenblicklichen Zweck ist es genügend zu wissen, was in der That auch genugsam auf der Hand liegt, dass das offene Ende einer Pfeife als Schwingungsbauch behandelt werden kann, wenn der Durchmesser der Pfeife in Vergleich mit der Wellenlänge vernachlässigt werden kann, vorausgesetzt aber, dass der äussere Druck in der Nähe des offenen Endes nicht selbst aus irgend einem von der Bewegung innerhalb der Pfeife unabhängigen

Grunde veränderlich ist. Wenn eine von der Pfeife unabhängige Schallquelle tönt, so wird der Druck an dem Ende der Pfeife derselbe sein, welcher dort stattfinden würde, wenn die Pfeife nicht vorhanden wäre. Das Hinderniss gegen die sichere Erfüllung der Bedingung für einen Schwingungsbauch an jedem beliebigen Orte liegt in der Trägheit des zur Aufrechthaltung des Druckes nöthigen Mechanismus. Für theoretische Zwecke dürfen wir diese Schwierigkeit übersehen und uns dazu einen massenlosen Stempel denken, der durch eine zusammengepresste, ebenfalls massenlose Feder zurückgedrängt wird. Die Annahme eines Schwingungsbauches an dem offenen Ende einer Pfeife ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung der Trägheit der äussern Luft.

Wir sahen, dass, wenn ein Knotenpunkt in irgend einem Punkte einer Pfeife vorhanden ist, eine Reihe von Knotenpunkten existiren muss, welche in Intervallen von $\frac{1}{2}\lambda$ von einander abstehen, dass ferner mitten zwischen jedem Paar von auf einander folgenden Knotenpunkten ein Schwingungsbauch vorhanden und dass die ganze Schwingung stationär sein muss. Derselbe Schluss ergiebt sich, wenn in irgend einem Punkt ein Schwingungsbauch vorhanden ist. Es kann aber sehr wohl vorkommen, dass weder Knotenpunkte noch Schwingungsbäuche existiren, wie z. B. in dem Falle, wo die Bewegung sich auf eine positive oder negative fortschreitende Welle reducirt. Bei stationärer Schwingung tritt eine Uebertragung von Energie längs der Röhre in irgend einer Richtung nicht ein, denn Energie kann weder einen Knotenpunkt noch einen Schwingungsbauch passiren.

257. Die Beziehungen zwischen den Längen einer offenen oder geschlossenen Pfeife und den Wellenlängen der eingeschlossenen Luftsäule können auch untersucht werden durch Verfolgung der Bewegung eines Pulsschlages, worunter eine Welle verstanden wird, die in enge Grenzen eingeschlossen ist und von gleichförmig verdichtetem oder verdünntem Fluidum gebildet wird. Wenn wir diesen Ausgangspunkt wählen,

so müssen wir sorgfältig die Umstände beachten, unter denen die verschiedenen Reflexionen stattfinden. Wir wollen zuerst annehmen, dass ein Verdichtungspulsschlag in der positiven Richtung gegen eine senkrecht zur Pfeife aufgestellte Wand vorwärtseilt. Da die in der Welle enthaltene Energie die Pfeife nicht verlassen kann, so muss dort eine reflectirte Welle entstehen; dass diese reflectirte Welle gleichfalls eine Verdichtungswelle ist, erhellt aus der Thatsache, dass dort kein Verlust an Fluidum eintritt. Zu demselben Schluss kann man auch auf andere Weise gelangen. Die Wirkung der Wand kann durch die Einführung einer ähnlichen und äquidistanten Verdichtungswelle, die sich in der negativen Richtung vorwärts bewegt, nachgeahmt werden. Da beide Wellen verdichtet sind und sich nach entgegengesetzten Richtungen fortpflanzen, so sind die von ihnen herrührenden Geschwindigkeiten des Fluidums gleich und entgegengesetzt und neutralisiren sich daher gegenseitig, wenn die Wellen sich über einander lagern.

Wird das Vorschreiten der negativen reflectirten Welle durch eine zweite Wand unterbrochen, so findet eine ähnliche Reflexion statt; die Welle, welche noch verdichtet bleibt, gewinnt ihren positiven Charakter wieder. Ist eine Strecke gleich dem Doppelten der Länge der Pfeife durcheilt, so stellt sich der ursprüngliche Zustand der Dinge vollkommen wieder her; derselbe Cyclus von Erscheinungen wiederholt sich unendlich oft. Wir lernen hieraus, dass die Periode in einer doppelt geschlossenen Pfeife die Zeit ist, welche der Pulsschlag gebraucht, um zweimal die Länge der Pfeife zu durcheilen.

Der Fall eines offenen Endes liegt etwas verschieden. Die negative Ergänzungswelle, welche dazu nothwendig ist, um die Wirkung des offenen Endes nachzuahmen, muss offenbar eine Verdünnungswelle sein, die fähig ist, den positiven Druck der condensirten primären Welle zu neutralisiren; daher ändert jetzt eine Welle bei dem Vorgange der Reflexion ihren Charakter; sie wird aus einer verdichteten eine verdünnte und aus einer verdünnten eine verdichtete. Eine andere Art diesen Gegenstand zu betrachten, ist die Beach-

tung, dass bei einem positiven Verdichtungspulsschlag die Bewegungsgrösse nach vorn gerichtet ist und bei der Abwesenheit von den hierzu nothwendigen Kräften durch die Reflexion nicht geändert werden kann. Eine Vorwärtsbewegung bei der reflectirten negativen Welle ist aber unweigerlich mit der Zustandsbedingung einer Verdünnung verbunden.

Sind beide Enden einer Pfeife offen, so erlangt ein vorwärts und rückwärts in ihr eilender Pulsschlag vollständig seinen ursprünglichen Zustand wieder, nachdem er zweimal die Länge der Pfeife durcheilt und dabei zwei Reflexionen erlitten hat. Daher ist die Beziehung zwischen Länge und Periode dieselbe wie bei einer Pfeife, deren Enden beide geschlossen sind. Wenn aber ein Ende der Pfeife offen und das andere geschlossen ist, so reicht ein zweimaliges Durcheilen nicht aus den Cyclus der Aenderungen zu schliessen. Der ursprüngliche Charakter einer Verdichtung oder Verdünnung kann nicht eher, als nach zwei Reflexionen an dem offenen Ende wieder hergestellt werden und demgemäss ist in diesem Falle die Periode gleich der Zeit, welche ein Pulsschlag gebraucht, um viermal die Länge der Pfeife zu durchlaufen.

258. Nach der vollständigen Besprechung des entsprechenden Problems in dem Capitel über die Saiten wird es nicht nöthig sein, noch mehr über die zusammengesetzten Schwingungen von Luftsäulen zu sagen. Als ein einfaches Beispiel können wir eine Pfeife nehmen, die an dem einen Ende offen und an dem andern geschlossen ist und die plötzlich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe versetzt wird, nachdem sie einige Zeit lang in einer parallel ihrer Länge gehenden Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegt wurde. Der Anfangszustand der in der Pfeife eingeschlossenen Luft ist dann ein solcher, dass die Luft eine, parallel zu x gerichtete, gleichförmige Geschwindigkeit u_0 besitzt, dass aber in ihr weder Verdichtung noch Verdünnung vorhanden ist. Nehmen wir an, dass der Anfangspunkt beim geschlossenen Ende liegt, so lautet die allgemeine Lösung nach (7) §. 255:

$$\varphi = (A_1 \cos n_1 t + B_1 \sin n_1 t) \cos \varkappa_1 x$$
$$+ (A_2 \cos n_2 t + B_2 \sin n_2 t) \cos \varkappa_2 x$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

worin $\varkappa_r = \frac{2r-1}{2}\frac{\pi}{l}$, $n_r = a\varkappa_r$, und $A_1, B_1, A_2, B_2 \ldots$ willkürliche Constanten sind.

Da $\dot{\varphi}$ im Anfange für alle Werthe von x gleich Null ist, so müssen die Coefficienten B verschwinden; die Coefficienten A sind aus der Bedingung zu bestimmen, dass für alle Werthe von x zwischen 0 und l:

$$\Sigma \varkappa_r A_r \sin \varkappa_r x = - u_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ist, worin die Summation sich über alle ganzen Werthe von r von 1 bis ∞ erstreckt. Die Bestimmung der Coefficienten A aus (2) wird auf dem gewöhnlichen Wege ausgeführt. Multipliciren wir mit $\sin \varkappa_r x\, dx$ und integriren von 0 bis l, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2} l \varkappa_r A_r = - \frac{u_0}{\varkappa_r},$$

oder:

$$A_r = - \frac{2 u_0}{\varkappa_r^2 l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Die vollständige Lösung lautet daher:

$$\varphi = - \frac{2 u_0}{l} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\cos \varkappa_r x}{\varkappa_r^2} \cos n_r t \quad \ldots \quad (4).$$

259. Bei einer am Anfangspunkt geschlossenen und bei $x = l$ offenen Pfeife sei $\varphi = \cos nt$ der Werth des von einer äusseren Schallquelle herrührenden Potentials an dem offenen Ende. Nach Bestimmung von P und ϑ in Gleichung (7) §. 255, finden wir:

$$\varphi = \frac{\cos \varkappa x}{\cos \varkappa l} \cos nt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Es geht hieraus hervor, dass die Schwingung in der Röhre ein Minimum ist, wenn $\cos \varkappa l = \pm 1$, das ist, wenn l ein Multiplum von $\frac{1}{2}\lambda$. In diesem Falle liegt bei $x = l$ ein

Knotenpunkt. Ist l ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{4}\lambda$, so verschwindet $\cos \varkappa l$ und dann wird nach (1) die Bewegung unendlich gross. Es zerfällt in diesem Falle die Annahme, dass der Druck an dem offenen Ende unabhängig von dem ist, was in der Röhre vor sich geht; wir können nur schliessen, dass die Schwingung in Folge des Isochronismus sehr gross wird. Weil bei $x = 0$ ein Knotenpunkt ist, muss dort, wo x ein ungerades Vielfache von $\frac{1}{4}\lambda$ beträgt, ein Schwingungsbauch sein; wir schliessen hieraus, dass bei einem Isochronismus die Druckänderung an dem offenen Ende der Röhre, welche von einer äussern Ursache herrührt, genau durch die von der Bewegung in der Röhre selbst herrührende Druckänderung neutralisirt wird. Wäre wirklich an dem offenen Ende eine Druckänderung des Ganzen, so müsste die Bewegung bei Abwesenheit von dissipativen Kräften ohne Grenzen wachsen.

Nehmen wir an, dass im Anfangspunkt ein Schwingungsbauch an Stelle eines Knoten liegt, so lautet die Lösung:

$$\varphi = \frac{\sin \varkappa x}{\sin \varkappa l} \cos nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

worin $\varphi = \cos nt$ der gegebene Werth von φ an dem offenen Ende $x = l$ ist. In diesem Falle wird der Ausdruck unendlich, wenn $\varkappa l = m\pi$, oder $l = \frac{1}{2} m\lambda$.

Wir wollen nun zunächst eine Röhre ins Auge fassen, deren Enden beide offen und Störungen von derselben Periode ausgesetzt sind, welche φ resp. zu He^{int}, Ke^{int} machen. Wenn nicht die Störungen an den Enden sich in derselben Phase befinden, muss wenigstens einer der Coefficienten H, K complex sein.

Nehmen wir die erste Form von (3) §. 255, so lautet der allgemeinen Ausdruck für φ:

$$\varphi = e^{int}(A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x).$$

Zur Bestimmung von A und B haben wir, wenn der Anfangspunkt in die Mitte der Röhre verlegt und angenommen

wird, dass die Werthe von He^{int}, Ke^{int} resp. $x = l$ und $x = -l$ entsprechen:

$$H = A \cos \varkappa l + B \sin \varkappa l,$$
$$K = A \cos \varkappa l - B \sin \varkappa l,$$

woraus:

$$A = \frac{H + K}{2 \cos \varkappa l}, \qquad B = \frac{H - K}{2 \sin \varkappa l} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

das giebt:

$$\varphi = e^{int} \frac{H \sin \varkappa (l + x) + K \sin \varkappa (l - x)}{\sin 2 \varkappa l} \; . \; . \; . \; (4).$$

Dieses Resultat hätte auch aus (2) abgeleitet werden können, wenn man sich überlegt, dass die gesuchte Bewegung durch die Uebereinanderlagerung zweier Bewegungen entsteht, von denen die eine von der Störung He^{int} unter der Annahme, dass das andere Ende $x = -l$ ein Schwingungsbauch ist, herrührt, und die andere von Ke^{ipt} bei der Annahme, dass das Ende $x = l$ ein Schwingungsbauch.

Die durch (4) ausgedrückte Schwingung kann nicht stationär sein, wenn nicht das Verhältniss $H : K$ reell ist, das ist, wenn nicht die Störungen an den Enden sich in gleicher oder entgegengesetzter Phase befinden. Daher ist mit Ausnahme der reservirten Fälle nirgendwo ein Schwingungsbauch und daher keine Stelle, an welcher eine seitliche Röhre angebracht werden könnte, längs deren der Schall sich nicht fortpflanzt [1]).

In der Mitte der Röhre, wo für $x = 0$, gilt:

$$\varphi = \frac{H + K}{2 \cos \varkappa l} e^{int} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5);$$

---

1) Ein Arrangement dieser Art ist von Prof. Mayer vorgeschlagen (Phil. Mag. [4] XLV, p. 90. 1873), um die Intensitäten von Schallquellen von derselben Höhe zu vergleichen. Jedes Ende der Röhre wurde der Wirkung von einer der zu vergleichenden Quellen ausgesetzt und dann die Abstände so regulirt, bis die Amplituden der durch H und K bezeichneten Schwingungen gleich waren. Die seitliche Röhre führte zu einer manometrischen Kapsel (§. 262); die Methode setzt dann voraus, dass durch Aenderung des Ansatzpunktes dieser seitlichen Röhre die Erregung der Flamme gehemmt werden kann. Aus der Discussion des obigen Textes geht hervor, dass diese Annahme theoretisch nicht genau ist.

diese Gleichung zeigt, dass die Druckänderung (proportional mit φ) verschwindet, wenn $H + K = 0$, das ist, wenn die Störungen an den Enden gleich sind und sich in entgegengesetzter Phase befinden. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, wird der Ausdruck für den Fall, dass $2l = \frac{1}{2}(2m + 1)\lambda$, unendlich.

In einem Punkte, der um $\frac{1}{4}\lambda$ von der Mitte der Röhre absteht, wird der Ausdruck für φ:

$$\varphi = \frac{H - K}{2 \sin \varkappa l} e^{int} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

welcher verschwindet, wenn $H = K$, das ist, wenn die Störungen an den Enden gleich sind und sich in derselben Phase befinden. Im Allgemeinen wird φ unendlich, wenn $\sin \varkappa l = 0$ oder $2l = m\lambda$.

Ist an einem Ende einer unbegrenzten Röhre eine Druckänderung vorhanden, welche von einer äusseren Quelle herrührt, so wird sich ein Zug von fortschreitenden Wellen von dem Ende aus nach innen fortpflanzen. Beträgt daher die von dem offenen Ende an längs der Röhre gemessene Länge y, so wird das Geschwindigkeitspotential durch $\varphi = \cos\left(nt - n\frac{y}{a}\right)$ ausgedrückt, entsprechend dem Werthe von $\varphi = \cos nt$ bei $y = 0$. Hieraus folgt, dass, wenn die Ursache der Störung in der Röhre in dem Durchgange von fortschreitenden Wellen quer durch das offene Ende liegt, die Intensität innerhalb der Röhre dieselbe wie die im Raume ausserhalb ist. Man muss hierbei nicht vergessen, dass der Durchmesser der Röhre als unendlich klein im Vergleich mit der Wellenlänge genommen wird.

Wir wollen zunächst annehmen, dass die Quelle der Bewegung in der Röhre selbst liegt, dass sie z. B. von der unveränderlichen Bewegung eines Kolbens im Anfangspunkte herrührt [1]. Die Constanten in (5) §. 255 sind durch die Be-

---

[1] Diese Probleme wurden von Poisson behandelt. Mém. de l'Institut, t. II, p. 305.

dingungen zu bestimmen, dass, wenn $x = 0$, $\frac{d\varphi}{dx} = cos\, nt$ etwa, und dass, wenn $x = l$, $\varphi = 0$ ist. Daher haben wir: $\varkappa A = - tang\, \varkappa l$, $\varkappa B = 1$ und der Ausdruck für φ wird:

$$\varphi = \frac{sin\, \varkappa (x - l)}{\varkappa\, cos\, \varkappa l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Bewegung ist ein Minimum, wenn $cos\, \varkappa l = \pm 1$, das heisst, wenn die Länge der Röhre ein Vielfaches von $\frac{1}{2} \lambda$.

Beträgt der Werth von l ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{4} \lambda$, so ist die von dem Kolben eingenommene Stelle ein Knotenpunkt, wenn an dem offenen Ende wirklich ein Schwingungsbauch liegt. Indessen versagt in diesem Falle unsere Lösung. Das Entweichen von Energie aus der Röhre heraus schützt davor, dass sich die Energie über einen gewissen Punkt hinaus anhäuft; diesem Umstande kann aber so lange keine Rechnung getragen werden, wie das offene Ende streng als ein Schwingungsbauch behandelt wird. Wir wollen die Frage der Resonanz wieder aufnehmen, nachdem wir die Theorie des offenen Endes mehr im Detail betrachtet haben, sobald wir im Stande sind, uns damit in genügenderer Weise zu beschäftigen.

Auf gleiche Weise lautet, wenn in dem Punkte $x = l$ ein Knotenpunkt statt eines Schwingungsbauches liegt, der Ausdruck für φ:

$$\varphi = \frac{cos\, \varkappa (l - x)}{\varkappa\, sin\, \varkappa l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8);$$

daher ist diese Bewegung ein Minimum, wenn l ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{4} \lambda$. In diesem Falle befindet sich im Anfangspunkte ein Schwingungsbauch. Ist l ein gerades Vielfaches von $\frac{1}{4} \lambda$, so würde der Anfangspunkt ein Knotenpunkt sein, was den Bedingungen unseres Problems widerspricht. In diesem Falle wird nach (8) die Bewegung unendlich, ein Umstand,

welcher bedeutet, dass die Schwingung bei Abwesenheit von dissipativen Kräften ohne Grenzen wachsen würde.

260. Die experimentelle Untersuchung von Luftwellen in Röhren hat Kundt[1]) mit grossem Erfolge angestellt. Wellen zu erzeugen ist leicht genug; es ist aber nicht so leicht eine Methode aufzufinden, durch welche diese Wellen gut genug untersucht werden können. Herr Kundt entdeckte, dass die Knotenpunkte von stationären Wellen sich durch Staub sichtbar machen lassen. Feiner Sand oder Lycopodiumsamen, der über die innere Fläche einer Glasröhre, die eine schwingende Luftsäule enthält, gestreut wird, ordnet sich selbst in Rippen an, mit Hülfe deren die Lage der Knotenpunkte leicht zu bestimmen und die Zwischenräume zwischen denselben zu messen sind. Bei Kundt's Versuchen lag die Schallquelle in der longitudinalen Schwingung einer Glasröhre, das Schallrohr genannt; die Staubfiguren wurden in einer zweiten weiteren Röhre, das Wellenrohr genannt, gebildet. Das letztere wurde mit einem beweglichen Stopfen versehen um seine Länge abzugleichen. Das andere Ende des Wellenrohres war mit einem Kork verschlossen, durch welchen das Schallrohr zur Hälfte hindurchging. Durch zweckmässiges Reiben brachte man das Schallrohr zum Schwingen in seiner tiefsten Schwingungsart, so dass der Mittelpunkt jenes ein Knotenpunkt war und sein Ende im Innern des Wellenrohres (welches Ende mit einem Korke versehen wurde) in letzterem Luftwellen erzeugte. Mittelst des Stopfens konnte die Länge der Luftsäule so abgeglichen werden, dass die Schwingungen so stark als möglich gemacht wurden; dieses tritt ein, wenn der Abstand des Stopfens von dem Ende der Schallröhre ein Vielfaches der halben Wellenlänge des Schalles beträgt.

Mit diesem Apparat konnte Kundt die Wellenlängen desselben Schalles in verschiedenen Gasen vergleichen, woraus

[1]) Pogg. Ann. t. CXXXV, p. 337. 1868.

die relativen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalles sofort abzuleiten sind; indessen waren die Resultate nicht ganz zufriedenstellend. Es fand sich, dass zwischen den Staubrippen nicht genau gleiche Zwischenräume lagen; ein anderer nachtheiliger Umstand war der, dass die Tonhöhe von einem Versuch zum andern variirte. Diese Fehler wurden einer Mittheilung von Bewegung an die Wellenröhre durch den Kork zugeschrieben, wodurch die Staubfiguren gestört und die Tonhöhe unregelmässig gemacht wurde in Folge von unausbleiblichen Aenderungen in der Befestigung des Apparates. Um diesem Uebelstande zu begegnen ersetzte Kundt den Kork, welcher eine zu steife Verbindung zwischen den Röhren herstellte, durch Lagen von dünnen Kautschukblättern, die mit Seide umwickelt waren, auf welche Weise eine biegsame und vollkommen luftdichte Verbindung erhalten wurde. Um jedes Risiko bei der Vergleichung der Wellenlängen, welches durch eine Aenderung der Tonhöhe veranlasst werden könnte, zu vermeiden, wurde der Apparat in der Weise abgeändert, dass es möglich war, die beiden Systeme von Staubfiguren gleichzeitig entstehen und demselben Schall entsprechen zu lassen. Ein sich hierbei ergebender weiterer Vorzug der neuen Methode bestand in der Elimination von Temperaturcorrectionen.

Bei dem verbesserten „Doppelapparat“ brachte Kundt das Schallrohr in seinem zweiten Schwingungstypus zum Schwingen, indem er dasselbe nahe seinem Mittelpunkt rieb; daher entstanden die Knotenpunkte an den Punkten, die um ein Viertel der Länge der Röhre von den Enden der letztern abstanden. In jedem dieser Punkte wurde eine Verbindung mit einem von dem andern unabhängigen Wellenrohre hergestellt. Diese Rohre waren mit beweglichen Stopfen und seitlichen Röhren und Hähnen versehen, welche letztere dazu dienten, die verschiedenen zu untersuchenden Gase zuzulassen. Es ist klar, dass die in den beiden Rohren gebildeten Staubfiguren genau derselben Tonhöhe entsprechen und dass daher eine Vergleichung der Zwischenräume zwischen den Rippen zu einer genauen Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für die beiden Gase, mit denen

die Rohre gefüllt waren, unter den Bedingungen des Versuches führt.

Die von Kundt erlangten Resultate sind folgende:

a. Die Schallgeschwindigkeit in der Röhre nimmt mit dem Durchmesser ab. Oberhalb eines gewissen Durchmessers ist diese Aenderung indessen nicht wahrnehmbar.

b. Die Verringerung der Geschwindigkeit wächst mit der Wellenlänge des benutzten Tones.

c. Pulver, in eine Röhre vertheilt, vermindern die Geschwindigkeit des Schalles in engen Röhren, sind aber in weiten ohne Einfluss.

d. In engen Röhren wächst der Einfluss des Pulvers, wenn dasselbe sehr fein vertheilt ist und in Folge dessen sehr heftig bewegt wird.

e. Rauhermachen des Innern einer engen Röhre oder Vergrössern ihrer innern Oberfläche verringert die Geschwindigkeit.

f. Bei weiten Röhren sind diese Aenderungen in der Geschwindigkeit von keinem Einfluss, so dass die Methode ungeachtet dieser Aenderungen zu genauen Bestimmungen benutzt werden kann.

g. Ein Einfluss der Stärke des Schalles auf die Geschwindigkeit kann nicht nachgewiesen werden.

h. Mit Ausnahme der ersten werden die Wellenlängen eines Tones, wie dieselben sich im Staub abzeichnen, durch die Art der Erregung nicht beeinflusst.

i. In weiten Röhren ist die Geschwindigkeit unabhängig vom Druck, bei engen Röhren aber wächst die Geschwindigkeit mit dem Drucke.

j. Alle beobachteten Aenderungen der Geschwindigkeit rühren von Reibung her und speciell von dem Austausch von Wärme zwischen der Luft und den Wänden der Röhre.

k. Die Geschwindigkeit des Schalles bei 100^0 stimmt genau mit der von der Theorie geforderten überein [1]).

---

[1]) Aus einigen Aeusserungen in der schon citirten Abhandlung, aus der die Notiz im Text wesentlich ausgezogen ist, scheint es, dass Herr

Wir werden zu der Frage der Beeinflussung der Fortpflanzung des Schalles in engen Röhren durch die oben unter j. erwähnten Ursachen zurückkehren und dann die von Helmholtz und Kirchhoff gegebenen Formeln aufsuchen.

261. Bei den im vorigen Abschnitte beschriebenen Versuchen sind die luftförmigen Schwingungen erzwungene; die Tonhöhe ist durch die äussere Quelle und nicht (in einem messbaren Grade) durch die Länge der Luftsäule bestimmt. In der That sind, genau gesprochen, alle anhaltenden Schwingungen erzwungen, da es nicht in der Gewalt von freien Schwingungen steht, sich selbst aufrecht zu erhalten, ausgenommen den idealen Fall, wo absolut keine Reibung vorhanden ist. Nichtsdestoweniger besteht ein wichtiger, praktischer Unterschied zwischen den Schwingungen einer Luftsäule, welche durch längsschwingende Stäbe oder durch eine Stimmgabel erzeugt werden, und solchen Schwingungen, wie sie in Orgelpfeifen oder in der chemischen Harmonika entstehen. In dem letzteren Falle hängt die Tonhöhe hauptsächlich von der Länge der Luftsäule ab, da die Wirkungsweise des Windes oder der Flamme [1]) lediglich die Ersetzung der durch Reibung oder Abgabe an die äussere Luft verloren gegangenen Energie ist. Die Luft in einer Orgelpfeife kann als eine fast frei schwingende Säule betrachtet werden, bei der das untere Ende, gegen welches der Wind bläst, angenähert als offen zu behandeln ist und das obere Ende als geschlossen oder offen, je nachdem es gerade der Fall ist. Daher beträgt die Wellenlänge des Grundtones einer gedeckten Pfeife das Vierfache der Länge der Pfeife. Es ist weiter mit Ausnahme der Enden

---

Kundt eine Fortsetzung seiner Untersuchungen geplant hat. Ich kann aber keine spätere Veröffentlichung über diesen Gegenstand auffinden.

[1]) Sensitive Flammen mit und ohne Pfeifen sind sehr ausführlich von Prof. Tyndall in seinem Buche „On Sound" behandelt worden; der Mechanismus dieser Art von Erscheinungen ist aber noch sehr unvollkommen bekannt. Wir werden auf ihn in einem spätern Capitel zurückkommen.

weder Knoten noch Bauch vorhanden. Die Obertöne der Pfeife sind die ungeraden harmonischen Töne, die Duodecime, die obere Terz derselben etc. entsprechend den verschiedenen Unterabtheilungen der Luftsäule. Bei der Duodecime z. B. befindet sich in dem dem offenen Ende zunächst gelegenen Theilungspunkt der in drei Theile getheilten Säule ein Knotenpunkt und an dem andern Punkte der Dreitheilung, mitten zwischen dem vorigen Punkte und dem gedeckten Ende der Pfeife, ein Bauch.

Bei der offenen Orgelpfeife sind beide Enden Bäuche; es muss wenigstens ein innerer Knotenpunkt vorhanden sein. Die Wellenlänge des Haupttones ist das Doppelte der Pfeifenlänge, die durch einen Knotenpunkt in der Mitte in zwei ähnliche Theile getheilt wird. Aus dem Vorigen ergiebt sich die Begründung der gewöhnlichen Regel, dass die Tonhöhe einer offenen Pfeife dieselbe wie die einer gedeckten Pfeife von der halben Länge ist. Diese Regel kann aus Gründen, die in einem spätern Capitel vollständiger aus einander gesetzt werden und welche mit unserer gegenwärtigen unvollkommenen Behandlung des offenen Endes zusammenhängen, nur annähernd richtig sein. Die offene Pfeife vermag die ganze Reihe von Tönen zu geben, welche die auf ihrem Grundton aufgebaute harmonische Scala bilden. Sie weicht hierin von der gedeckten Pfeife ab. Bei der Octave befindet sich im Mittelpunkt der Pfeife ein Bauch und Knotenpunkte in den Punkten mitten zwischen dem Mittelpunkt und den Enden.

Da die Schwingungszahl in einer Pfeife der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in dem Gase, welches die Pfeife füllt, proportional ist, so wird durch die Vergleichung der Tonhöhen der von derselben Pfeife in verschiedenen Gasen erhaltenen Klänge eine auf der Hand liegende Methode gegeben, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu bestimmen in Fällen, in welchen die Unmöglichkeit hinreichend lange Gassäulen zu erhalten den Gebrauch der directen Methode ausschliesst.

Chladni führte mit seinem gewöhnlichen Scharfsinn zuerst auf den Weg zu dieser Anwendung. Später wurde diese Me-

thode von Dulong[1]) und von Wertheim[2]), der sehr zufriedenstellende Resultate erhielt, wieder aufgenommen.

262. Den Zustand der Luft in dem Innern einer Orgelpfeife untersuchte Savart[3]) experimentell. Derselbe senkte in die Pfeife eine kleine gespannte, mit etwas Sand bestreute Membran. In der Nachbarschaft eines Knoten blieb der Sand merklich ungestört; wenn man sich aber einem Bauche näherte, so tanzte er mehr oder weniger heftig. Bei weitem die überzeugendste Untersuchungsanordnung ist indessen die von König erfundene. Hier wird die Schwingung durch eine kleine Gasflamme angezeigt, welche aus einer kleinen Röhre herauskommt, die mit einem, eine manometrische Kapsel genannten, Hohlraume in Verbindung steht. Dieser Hohlraum ist auf der einen Seite durch eine Membran abgeschlossen; auf letztere wirkt die schwingende Luft. So wie die Membran schwingt, wodurch das Volumen der Kapsel sich ändert, wird die Gaszufuhr unstetig und die Flamme intermittirend. Die Periode ist natürlich für diese Intermittenz zu klein, als dass sich letztere direct zeigt, wenn man die Flamme stetig ansieht. Durch Bewegen des Kopfes oder mittelst eines beweglichen Spiegels kann die Auflösung der Flamme in mehr oder weniger getrennte Bilder hervorgerufen werden; aber selbst ohne Auflösung ist der geänderte Charakter der Flamme an dem allgemeinen Aussehen der letzteren erkennbar. Bei der Anwendung auf Orgelpfeifen werden eine oder mehrere Kapseln an einer Pfeife auf eine solche Weise befestigt, dass die Membranen mit der schwingenden Luftsäule in Berührung stehen. Der Unterschied in der Flamme, je nachdem die mit ihr verbundene Kapsel bei einem Knotenpunkt oder bei einem Bauch befestigt wird, tritt sehr deutlich hervor.

---

[1]) Recherches sur les chaleurs spécifiques des fluides élastiques. Ann. d. Chim., t. XLI, p. 113.

[2]) Ann. d. Chim., 3ième série. t. XXII, p. 434.

[3]) Ann. d. Chim., t. XXIV, p. 56. 1823.

263. Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Pfeife gerade ist; man kann aber leicht voraussehen, dass, wenn der Querschnitt klein und in seiner Grösse nicht veränderlich ist, kein Gewicht auf die gerade Gestalt der Pfeife gelegt zu werden braucht. Wir wollen uns eine gekrümmte x-Achse denken, die längs der Mitte der Pfeife läuft; der constante Querschnitt senkrecht zu dieser Achse sei S. Ist nun der grösste Durchmesser von S sehr klein im Vergleiche mit der Wellenlänge des Schalles, so wird das Geschwindigkeitspotential φ auf dem ganzen Querschnitt nahezu unveränderlich. Durch Anwendung des Green'schen Satzes auf den von dem Innern der Pfeife und zwei Querschnitten begrenzten Raum erhalten wir:

$$\iiint \nabla^2 \varphi \, dV = S \,.\, \Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

Nach der allgemeinen Bewegungsgleichung ist nun:

$$\iiint \nabla^2 \varphi \, dV = \frac{1}{a^2} \iiint \ddot{\varphi} \, dV$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \iiint \varphi \, dV = \frac{S}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \int \varphi \, dx$$

In dem Grenzfall, wo der Abstand zwischen den Querschnitten verschwindend klein wird, folgt:

$$\int \varphi \, dx = \varphi \, dx, \qquad \Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{d^2\varphi}{dx^2} \, dx;$$

so dass:

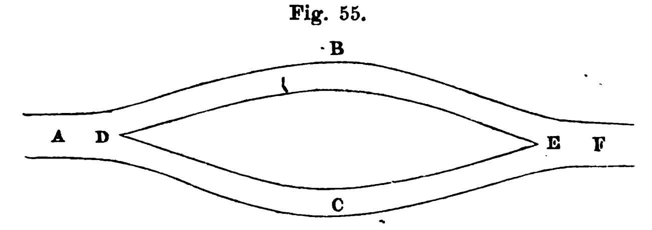
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

ein Beweis dafür, dass φ von x in derselben Weise abhängt, als wenn die Pfeife gerade wäre. Mittelst Gleichung (1) können die Schwingungen in gekrümmten Pfeifen von gleichförmigem Querschnitt leicht untersucht werden; die Resultate sind die strengen Folgerungen unserer Fundamental-Gleichungen (welche keine Rücksicht auf die Reibung nehmen) unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt unendlich klein ist. Bei dünnen Röhren, wie solche bei den Versuchen immer gebraucht werden, reichen diese Gleichungen in jedem Falle

soweit aus, um eine gute Darstellung des thatsächlichen Vorganges zu geben.

264. Wir wollen nun zu der Beobachtung von gewissen Fällen mit einander verbundener Röhren übergehen. In der untenstehenden Figur stellt AD eine dünne Röhre dar, welche sich bei D in zwei Arme DB, DC theilt. Bei E vereinigen sich die Arme und bilden eine einzige Röhre EF. Von den Querschnitten der Einzelröhren und der Röhrenarme nehmen wir an, dass sie sowohl gleichförmig als auch sehr klein sind.

Fig. 55.



Fürs Erste möge eine positive Welle von willkürlichem Typus in A vorwärtseilen. Bei ihrer Ankunft an der Gabelung D wird sie in B und C positive Wellen erzeugen und daneben, wenn nicht eine bestimmte Bedingung erfüllt ist, eine negative reflectirte Welle in A. Das Potential der positiven Wellen sei mit f_A, f_B, f_C bezeichnet, wo f in jedem Falle eine Function von $x - at$ ist; die reflectirte Welle sei $F(x + at)$. Die bei D zu erfüllenden Bedingungen sind zuerst die, dass die Drucke in den drei Röhren dieselben sind, und zweitens die, dass die ganze Geschwindigkeit des Fluidums in A gleich der Summe der ganzen Geschwindigkeiten des Fluidums in B und C ist. Daher haben wir, wenn wir A, B, C zur Bezeichnung des Flächeninhaltes der Querschnitte gebrauchen, nach §. 244:

$$\left.\begin{array}{l} f'_A - F' = f'_B = f'_C \\ A(f'_A + F') = Bf'_B + Cf'_C \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1);$$

woraus:

$$F' = \frac{B + C - A}{B + C + A} f'_A \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

$$f'_B = f'_C = \frac{2A}{B + C + A} f'_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$ [1].

Es geht aus diesen Gleichungen hervor, dass f_B und f_C immer dieselben sind. Reflection findet nicht statt, wenn:

$$B + C = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

das heisst, wenn die Summe der Querschnitte der Arme gleich dem Querschnitte des Röhrenstumpfes AD ist. Wird diese Bedingung erfüllt, so haben wir:

$$f_B = f_C = f_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Welle verbreitet sich dann in B und C genau so, als sie es in A gethan hätte, wenn keine Unterbrechung vorhanden gewesen wäre. Sind die Längen der Arme zwischen D und E gleich und ist der Querschnitt von F gleich dem von A, so vereinigen sich die Wellen bei der Ankunft in E in eine durch F sich fortpflanzende Welle, wobei wiederum keine Reflexion stattfindet. Die Theilung der Röhre ist daher gänzlich ohne Wirkung gewesen; da dasselbe Resultat für eine von F nach A gehende negative Welle richtig sein wird, so dürfen wir allgemein schliessen, dass eine Röhre in zwei oder mehr Arme, alle von derselben Länge, getheilt werden kann, ohne dass irgendwie das Gesetz der Luftschwingungen beeinflusst wird, vorausgesetzt, dass der ganze Querschnitt constant bleibt. Sind die Längen der Arme von D nach E ungleich, so ist das Resultat ein anderes. Neben der positiven Welle in F sind im Allgemeinen negative Wellen in B und C vorhanden. Der interessanteste Fall ist der, wo eine Welle vom harmonischen Typus vorhanden und einer der Arme um ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ länger wie der andere ist. Beträgt der

---

[1]) Diese Formeln sind in ihrer Anwendung auf die Bestimmung der reflectirten und gebrochenen Wellen an der Vereinigungsstelle zweier Röhren von den Querschnitten resp. $B + C$ und A von Poisson, Mém. de l'Institut, t. II, p. 305 gegeben. Der Leser muss nicht vergessen, dass beide Durchmesser klein im Vergleich mit der Wellenlänge sein müssen.

Unterschied ein gerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$, so ist das Resultat dasselbe, als wenn beide Arme dieselbe Länge hätten; es wird keine Reflexion eintreten. Es sei aber nun, während *B* und *C* noch gleichen Querschnitt besitzen, eine von ihnen um ein ungerades Vielfache von $\frac{1}{2}\lambda$ länger wie die andere. Da die Wellen in *E* mit entgegengesetzten Phasen ankommen, so folgt aus Symmetriegründen, dass die positive Welle in *F* verschwinden und dass der Druck in *E*, der nothwendiger Weise in allen Röhren derselbe ist, constant sein muss. Die Wellen in *B* und *C* werden daher wie an einem offenen Ende reflectirt. Dass den Bedingungen der vorliegenden Frage in letzterem Falle ebenfalls genügt wird, kann man dann sehen, wenn man sich quer durch die Röhre *F* in der Nachbarschaft von *E* eine Wand auf solch eine Weise gezogen denkt, dass die Röhren *B* und *C* ohne Aenderung des Querschnittes mit einander in Verbindung stehen. Die Welle in jeder Röhre wird dann ohne Unterbrechung in die andere übergehen. Die Druckänderung in *E*, welche das Resultat von gleichen und entgegengesetzten Componenten ist, verschwindet. Unter diesen Umständen kann die Wand ohne die Zustandsbedingungen zu ändern entfernt werden; längs *F* wird sich aber keine Welle fortpflanzen, welches auch der Querschnitt von *F* sein mag. Die eben betrachtete Anordnung ist von Herschel erfunden, sie ist von Quinke und Anderen zu experimentellen Zwecken angewandt — eine Anwendung, zu deren Beschreibung später die Gelegenheit kommen wird. Man erwähnt diese Erscheinung oft als ein Beispiel von Interferenz, wogegen sich kein Einwurf machen lässt. Doch ist dem nicht so, wenn der Leser zu der Annahme geführt wird, dass die positiven Wellen sich gegenseitig in *F* neutralisiren und dass dort der Wellenvorgang ein Ende nimmt. Man muss nie vergessen, dass bei der Interferenz niemals ein Verlust von Energie eintritt, sondern nur eine verschiedenartige Vertheilung. Wird Energie von einem Platze abgelenkt, so erscheint sie an einem andern wieder. In dem

vorliegenden Falle führt die positive Welle in A Energie mit sich. Ist nun längs F keine Welle vorhanden, so sind zwei Alternativen möglich. Entweder häuft sich Energie in den Armen an, oder sie geht, wenn das nicht der Fall ist, längs A in der Form einer negativen Welle zurück. Um zu sehen, was wirklich geschieht, wollen wir den Verlauf der an E rückwärts reflectirten Wellen verfolgen.

Diese Wellen sind an Grösse gleich und gehen von E mit entgegengesetzten Phasen aus. Bei dem Uebergange von E auf D hat die eine einen um ein ungerades Vielfache von $\frac{1}{2}\lambda$ grösseren Weg zurückzulegen als die andere; daher befinden sich beide Wellen bei der Ankunft in D in vollkommener Uebereinstimmung. Unter diesen Umständen setzen sich dieselben in eine einzelne Welle zusammen, welche in der negativen Richtung längs A vorschreitet, dort findet also keine Reflexion statt. Erreicht die negative Welle das Ende der Röhre A oder wird sonst wie auf ihrem Laufe gestört, so kann sie ganz oder zum Theil reflectirt werden; dann wiederholt sich der Vorgang. Wie oft dies aber auch geschehen mag, es wird keine Welle längs F auftreten, wenn nicht durch Anhäufung in Folge von dem Zusammenfallen von Perioden die Schwingung in den Armen so gross wird, dass ein kleiner Bruchtheil derselben nicht länger zu vernachlässigen ist.

Wir können auch folgendermaassen schliessen. Wir nehmen an, die Röhre F, Fig. 56, sei wie vorher durch eine Wand abgeschlossen. Die Bewegung in dem Ringe, welche von Kräften, die bei D wirken, hervorgerufen wird, ist nothwendiger Weise symmetrisch in Bezug auf D und D' — dem Punkt, welcher $DBCD$ in gleiche Theile theilt. Daher liegt bei D' ein Knotenpunkt und die Schwingung ist stationär. Ist dieses der Fall, so muss in einem Punkte E, welcher um $\frac{1}{4}\lambda$ von D' nach einer der beiden Seiten absteht, ein Bauch liegen. Wird dann die Wand entfernt, so ist dort noch immer kein Antrieb zur Erzeugung einer Schwingung in F vorhanden. Wenn der Umfang des Ringes ein Vielfaches von λ beträgt, so

kann in ihr unabhängig von irgend welchen seitlichen Oeffnungen eine Schwingung von der fraglichen Periode existiren.

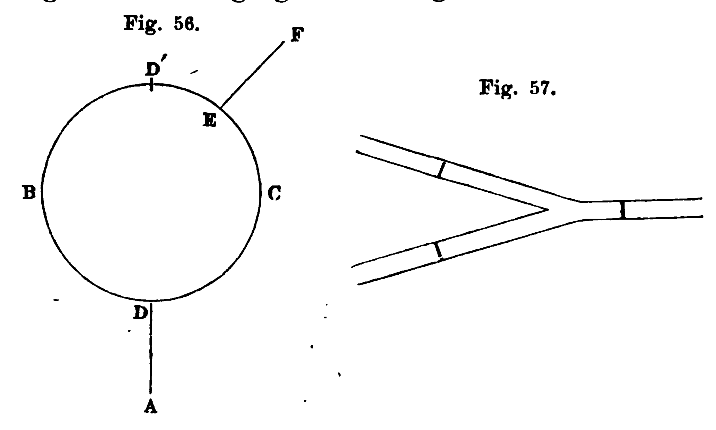


Fig. 56. Fig. 57.

Jede Combination von mit einander in Verbindung stehenden Röhren lässt sich auf ähnliche Weise behandeln. Das allgemeine Princip ist das, dass an jeder Verbindungsstelle ein Raum genommen werden kann, der gross genug ist, um den ganzen Bereich einzuschliessen, in welchem der Mangel an Gleichförmigkeit das Gesetz der Wellen beeinflusst, und doch noch so klein, dass seine längste Ausdehnung im Vergleich zu λ vernachlässigt werden darf. Unter solchen Umständen lässt sich das Fluidum in dem in Frage stehenden Raum so behandeln, als wäre die Wellenlänge unendlich oder das Fluidum selbst incompressibel und in diesem Falle würde sein Geschwindigkeits-Potential der Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ genügen, und somit denselben Gesetzen wie die Electricität folgen.

265. Ist der Querschnitt einer Röhre veränderlich, so kann das Problem der Luftschwingungen in ihr nicht allgemein gelöst werden. Der Fall von kegelförmigen Röhren wird später behandelt. Augenblicklich wollen wir einen angenäherten Ausdruck für die Tonhöhe einer nahezu cylindrischen Pfeife suchen, indem wir zuerst den Fall nehmen, wo beide Enden geschlossen sind. Die anzuwendende Methode ist derjenigen ähnlich, welche bei einer Saite gebraucht

wurde, deren Dichtigkeit nicht ganz constant ist, s. §§. 91, 140. Sie beruht auf dem Princip, dass die Periode einer freien Schwingung die stationäre Bedingung erfüllt und daher aus den potentiellen und kinetischen Energieen irgend einer hypothetischen Schwingungsart berechnet werden kann, welche nicht viel von der wirklich vorhandenen Art abweicht. In Uebereinstimmung mit diesem Plane wollen wir annehmen, dass die zu irgend einem Querschnitt S normale Geschwindigkeit über diesen Querschnitt einen constanten Werth besitzt, wie das sehr nahezu der Fall sein muss, wenn die Aenderung von S klein ist. Es stelle X den totalen Transport von Fluidum durch den Querschnitt bei x, letzteres x gerechnet von der Gleichgewichtslage aus, zur Zeit t vor; dann giebt $\dot{X}$ die totale Geschwindigkeit des Stromes und $\dot{X} : S$ die thatsächliche Geschwindigkeit der Theilchen des Fluidums an, so dass die kinetische Energie der Bewegung innerhalb der Röhre ausgedrückt ist durch:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int \frac{\dot{X}^2}{S} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die potentielle Energie §. 245 (12) wird im Allgemeinen dargestellt durch:

$$V = \frac{1}{2} a^2 \varrho \int\int\int s^2 d\,V$$

oder, da $d\,V = S\,d\,x$, durch:

$$V = \frac{1}{2} a^2 \varrho \int S s^2 d x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Anderenseits ist wegen der Bedingung der Continuität:

$$- s = \frac{1}{S} \frac{d X}{d x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

und daher:

$$V = \frac{1}{2} a^2 \varrho \int \frac{1}{S} \left(\frac{d X}{d x}\right)^2 d x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Nehmen wir nun für X einen Ausdruck von derselben Form, wie er erhalten würde, wenn S constant wäre, das ist:

$$X = \sin \frac{\pi x}{l} \cos n t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

so erhalten wir aus den Werthen von T und V in (1) und (4):

$$n^2 = \frac{a^2\pi^2}{l^2}\int_0^l cos^2 \frac{\pi x}{l} \frac{dx}{y} : \int_0^l sin^2 \frac{\pi x}{l} \frac{dx}{S} \ldots\ldots (6),$$

oder indem man $S = S_0 + \triangle S$ setzt und das Quadrat von $\triangle S$ vernachlässigt:

$$n^2 = \frac{a^2\pi^2}{l^2}\left\{1 - 2\int_0^l cos \frac{2\pi x}{l} \frac{\triangle S}{S_0} \frac{dx}{l}\right\} \ldots\ldots (7).$$

Das Resultat wird zweckmässig in Werthen von $\triangle l$ ausgedrückt, der Correction, welche an l angebracht werden muss, damit die Tonhöhe aus der ursprünglichen Formel, bei der S als constant vorausgesetzt wurde, berechnet werden kann. Für $\triangle l$ hat man:

$$\triangle l = \int_0^l cos \frac{2\pi x}{l} \frac{\triangle S}{S_0} dx \ldots\ldots\ldots (8)$$

Die grösste Wirkung übt eine Veränderung des Querschnittes nahe einem Knotenpunkte oder nahe einem Bauche aus. Eine Vergrösserung des Querschnittes erniedrigt in dem ersten Falle die Tonhöhe, in dem zweiten erhöht sie dieselbe. In den Punkten mitten zwischen den Knotenpunkten und Bäuchen ist eine kleine Aenderung des Querschnittes ohne Wirkung. Die Tonhöhe wird daher durch eine Verbreiterung oder Verengerung nahe an der Mitte der Röhre entschieden geändert; der Einfluss einer schwachen conischen Form ist aber viel geringer.

Der Ausdruck für $\triangle l$ in (8) lässt sich, wie er dasteht, nur auf den tiefsten Ton anwenden; wir können ihn indess auch für den $m$ten Ton der harmonischen Scala benutzen, wenn wir ihn dadurch modificiren, dass wir an Stelle von $cos \frac{2\pi x}{l}$ setzen $cos \frac{2m\pi x}{l}$.

Bei einer Röhre, die an beiden Enden offen ist, wird (5) ersetzt durch:

$$X = \cos\frac{\pi x}{l}\cos nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

was an Stelle von (8) zu:

$$\triangle l = -\int_0^l \cos\frac{2\pi x}{l}\frac{\triangle S}{S_0}\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

führt. Die Tonhöhe des Klanges wird nun durch Verbreiterung an den Enden oder durch Verengerung in der Mitte der Röhre erhöht; und wie vorher bleibt sie durch eine geringe conische Form der ganzen Röhre ungeändert (§. 281).

266. Der Fall von fortschreitenden Wellen, die sich in einer Röhre von veränderlichem Querschnitt bewegen, bietet gleichfalls Interesse. In seiner allgemeinen Form würde das Problem ein sehr schwieriges sein; wo aber die Aenderung des Querschnittes sehr allmälig vor sich geht, so dass keine beträchtliche Aenderung innerhalb eines Raumes von einer grossen Zahl von Wellenlängen eintritt, da führt uns das Princip der Energie zu einer angenäherten Lösung. Es hat keine Schwierigkeit einzusehen, dass die Welle in dem angenommenen Falle an keiner Stelle ihres Weges eine merkliche Reflexion erleidet und dass deshalb die Energie der Bewegung ungeändert bleiben muss[1]. Nun wissen wir aus §. 245, dass bei einer gegebenen Grösse des Querschnitts der von der Welle durcheilten Luftmasse die Energie eines Zuges von einfachen Wellen sich wie das Quadrat der Amplitude verhält, woraus folgt, dass beim Vorschreiten der Welle die Amplitude der Schwingung sich umgekehrt wie die Quadratwurzel des Querschnitts der Röhre ändert. In jeder andern Hinsicht bleibt die Art der Schwingung vollkommen ungeändert. Aus diesen Resultaten können wir uns eine allgemeine Idee von der Wirkung eines Hörrohres bilden. Es ergiebt sich, dass nach den

[1]) Phil. Mag. [5] I, p. 261.

gewöhnlichen angenäherten Gleichungen keine Grenze in der in einer Röhre von allmälig abnehmendem Querschnitt möglichen Concentrirung des Schalles vorhanden ist.

Dieselbe Methode bleibt anwendbar, wenn die Dichtigkeit des Mediums sich langsam von Punkt zu Punkt ändert. Zum Beispiel kann die Amplitude einer Schallwelle, die sich nach oben in die Atmosphäre bewegt, durch die Bedingung bestimmt werden, dass die Energie nicht geändert wird. Aus §. 245 geht hervor, dass die Amplitude sich umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Dichtigkeit verhält [1]).

---

[1]) Eine schwierige Frage erhebt sich, wenn man nach dem schliesslichen Schicksal von Schallwellen frägt, die sich nach oben fortpflanzen. Es ist hierzu zu bemerken, dass in verdünnter Luft der schwächende Einfluss der Viscosität sehr stark wächst.

Capitel XIII.

Specielle Probleme. Reflexion und Brechung von ebenen Wellen.

267. Bevor wir uns an die Besprechung der allgemeinen Gleichungen für Luftschwingungen machen, richten wir zweckmässig unsere Aufmerksamkeit auf einige specielle Probleme, welche sich hauptsächlich auf die Bewegung nach zwei Dimensionen beziehen und die einer strengen und doch vergleichsweise einfachen Lösung zugänglich sind. Auf diese Weise wird sich der Leser, dem der Gegenstand neu ist, einige Vertrautheit mit den später gebrauchten Ideen und Methoden aneignen, bevor er grössere Schwierigkeiten zu überwinden sucht.

In dem vorhergehenden Capitel (§. 255) untersuchten wir die Schwingungen nach einer Dimension, welche parallel der Axe einer Röhre, die an beiden Enden geschlossen ist, stattfinden. Wir wollen nun untersuchen, welche Schwingungen in einem geschlossenen rechtwinkligen Raume möglich sind, indem wir die Beschränkung fallen lassen, dass die Bewegung nur nach einer Richtung vor sich geht. Für jede einfache Schwingung, deren das System fähig ist, ändert sich φ wie eine Kreisfunction der Zeit, etwa $\cos \varkappa a t$, wo $\varkappa$ irgend eine Constante bedeutet; daher haben wir $\ddot{\varphi} = -\varkappa^2 a^2 \varphi$ und deshalb nach der allgemeinen Differentialgleichung (9) §. 244:

$$\nabla^2 \varphi + \varkappa^2 \varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Gleichung (1) muss in dem ganzen eingeschlossenen Raume erfüllt werden. Die auf den sechs Seitenflächen des letzteren zu erfüllende Oberflächenbedingung lautet einfach:

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

worin dn ein Element der Normale an die Fläche bedeutet. Nur für specielle Werthe von $\varkappa$ ist es möglich, (1) und (2) gleichzeitig zu erfüllen.

Nehmen wir drei sich schneidende Kanten als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, bezeichnen die Längen der Kanten mit resp. α, β, γ, so wissen wir (§. 255), dass:

$$\varphi = \cos\left(p\,\frac{\pi x}{\alpha}\right), \quad \varphi = \cos\left(q\,\frac{\pi y}{\beta}\right), \quad \varphi = \cos\left(r\,\frac{\pi z}{\gamma}\right),$$

worin p, q, r ganze Zahlen bedeuten, particuläre Lösungen des Problemes sind. Durch jede dieser Formen wird Gleichung (2) erfüllt; vorausgesetzt, dass $\varkappa$ gleich $p\,\frac{\pi}{\alpha}$, $q\,\frac{\pi}{\beta}$ oder $r\,\frac{\pi}{\gamma}$ ist, wie es gerade zutrifft, wird auch Gleichung (1) genügt. Gleichfalls ist es evident, dass der Grenzbedingung (2) auf der ganzen Oberfläche durch die Form:

$$\varphi = \cos\left(p\,\frac{\pi x}{\alpha}\right) \cos\left(q\,\frac{\pi y}{\beta}\right) \cos\left(r\,\frac{\pi z}{\gamma}\right) \quad \ldots \quad (3)$$

genügt wird, eine Form, welche auch (1) erfüllt, wenn $\varkappa$ so gewählt wird, dass:

$$\varkappa^2 = \pi^2 \left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} + \frac{r^2}{\gamma^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

worin, wie vorher, p, q, r ganze Zahlen sind.

Die allgemeine Lösung, welche man durch Addirung sämmtlicher in (3) enthaltenen Particularlösungen erhält, lautet:

$$\varphi = \Sigma\Sigma\Sigma(A \cos \varkappa a t + B \sin \varkappa a t)$$
$$\times \cos\left(p\,\frac{\pi x}{\alpha}\right) \cos\left(q\,\frac{\pi y}{\beta}\right) \cos\left(r\,\frac{\pi z}{\gamma}\right) \quad \ldots \quad (5),$$

worin A und B willkürliche Constanten bedeuten und die Summation über alle ganzen Werthe von p, q, r ausgedehnt wird.

Diese Lösung ist allgemein genug, um jeden beliebigen Anfangszustand in dem Raume in sich zu schliessen, wenn auf die Molecularrotation keine Rücksicht genommen wird. Die Anfangsvertheilung der Geschwindigkeiten hängt von den Anfangswerthen von φ oder $\int (u_0\, dx + v_0\, dy + w_0\, dz)$ ab und kann nach dem Fourier'schen Satze durch (5) ausgedrückt werden, wenn man den Coefficienten A zweckmässige Werthe ertheilt. Auf gleiche Weise lässt sich eine beliebige Anfangsvertheilung von Verdichtung (oder Verdünnung), welche von dem Anfangswerth von $\dot{\varphi}$ abhängt, dadurch darstellen, dass man den Coefficienten B zweckmässige Werthe beilegt.

Die Untersuchung kann etwas anders geführt werden, indem man dem Fourier'schen Satze gemäss von der Annahme ausgeht, dass der allgemeine Werth von φ zur Zeit t sich durch die Form:

$$\varphi = \Sigma\Sigma\Sigma\, C \cos\left(p\,\frac{\pi x}{\alpha}\right) \cos\left(q\,\frac{\pi y}{\beta}\right) \cos\left(r\,\frac{\pi z}{\gamma}\right)$$

ausdrücken lässt. Hierin können die Coefficienten C von t, aber nicht von x, y, z abhängen. Es wären dann die Ausdrücke für T und V zu bilden, wobei man sehen würde, dass dieselben nur die Quadrate der Coefficienten C enthalten. Aus diesen Ausdrücken folgen darauf die Normal-Bewegungsgleichungen, welche jede Normalcoordinate C mit der Zeit verbindet.

Die tiefste Schwingungsart ist die, bei welcher die ganze Bewegung parallel zu der längsten Ausdehnung des Raumes vor sich geht; es ist dabei kein innerer Knoten vorhanden. Bezeichnet α demnach die grösste der drei Seiten α, β, γ, so haben wir zu setzen $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$.

Bei einem würfelförmigen Raume ist $\alpha = \beta = \gamma$ und dann haben wir statt (4):

$$\varkappa^2 = \frac{\pi^2}{\alpha^2}(p^2 + q^2 + r^2) \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

oder, wenn λ die Wellenlänge der ebenen Welle von derselben Schwingungsdauer bedeutet:

$$\lambda = 2\alpha : \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Für die tiefste Schwingungsart ist $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$ oder $p = 0$, $q = 1$, $r = 0$ etc. und $\lambda = 2\alpha$. Die zweittiefste tritt ein, wenn $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$ etc.; dann ist $\lambda = \sqrt{2}\,\alpha$. Ist $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$, so haben wir $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha$. Für die vierte der tiefsten Schwingungsarten ist $p = 2$, $q = 0$, $r = 0$ etc. und dann $\lambda = 4\alpha$.

Wie bei der Membran (§. 197) können, wenn zwei oder mehr primäre Schwingungsarten dieselbe Schwingungsperiode besitzen, aus diesen andere Schwingungsarten von gleicher Periode durch Zusammensetzung abgeleitet werden.

Es ist nicht nöthig, dass die dreifach unendliche Reihe von möglichen einfachen Schwingungscomponenten in allen einzelnen Fällen von zusammengesetzten Schwingungen in ihrer ganzen Vollständigkeit anzuwenden ist. Wenn wir z. B. annehmen, dass der Inhalt des Raumes bei seinem Anfangszustand an keiner Stelle weder verdichtet noch verdünnt war, und dass derselbe eine gleichförmige Geschwindigkeit besitzt, deren Componenten parallel den Coordinatenaxen resp. sind u_0, v_0, w_0, so werden keine einfachen Schwingungen erregt, für welche mehr wie eine der drei Zahlen p, q, r endlich ist. In der That kann jede anfängliche Schwingungscomponente getrennt für sich betrachtet werden und das Problem ist ähnlich dem im §. 258 gelösten.

In späteren Capiteln werden wir anderen Beispielen von Luftschwingungen innerhalb vollständig geschlossener Gefässe begegnen.

Einige der natürlichen Klänge, welche der in einem geschlossenen Raume enthaltenen Luft zukommen, können im Allgemeinen dadurch aufgefunden werden, dass man die Tonleiter singt. Wahrscheinlich sind auf diesem Wege Blinde fähig, die Grösse von Zimmern abzuschätzen [1]).

---

[1]) Ein bemerkenswerthes Beispiel wird in Young's Natural Philosophy II, p. 27 angeführt, das aus Darwin's Zoonomia II, 487 genommen ist: „Der verstorbene blinde Fielding betrat, als er mich einst be-

Bei langen und engen Durchgängen sind die Schwingungen parallel der Länge zu klein um auf das Ohr einen Eindruck zu machen; aber Klänge, die von transversalen Schwingungen herrühren, können oft gehört werden. Die relativen Verhältnisse der Obertöne hängen von dem Orte ab, wo die Störung entstand [1]).

In einigen Fällen dieser Art wird die Tonhöhe solcher Schwingungen, deren Richtung hauptsächlich transversal ist, durch das Eintreten von longitudinaler Bewegung beeinflusst. Nehmen wir z. B. in (3) und (4) an, dass $q = 1$, $r = 0$ und dass α viel grösser wie β ist. Für die transversale Hauptschwingung ist $p = 0$ und $\varkappa = \pi : \beta$. Neben dieser sind andere Schwingungsarten vorhanden, bei denen die Bewegung hauptsächlich transversal ist und die erhalten werden, wenn man p kleine ganze Werthe ertheilt. So haben wir, wenn $p = 1$:

$$\varkappa^2 = \pi^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right),$$

welches zeigt, dass die Tonhöhe nahezu dieselbe wie vorher ist [2]).

268. Nehmen wir an, dass γ unendlich gross wird, so verwandelt sich der Raum des vorhergehenden Abschnittes in eine unendlich lange rechteckige Röhre, deren Seiten α und β sind. Welches auch die Bewegung der Luft innerhalb dieser Röhre sein mag, ihr Geschwindigkeitspotential kann stets nach dem Fourier'schen Satze durch die Reihe:

---

suchte, zum ersten Mal mein Zimmer. Nachdem er einige Worte gesprochen hatte, sagte er: Dieses Zimmer ist etwa 22 Fuss lang, 18 Fuss breit und 12 Fuss hoch;" das Alles errieth er mit grosser Genauigkeit mit Hülfe des Ohres.

[1]) Oppel, Die harmonischen Obertöne des durch parallele Wände erregten Reflexionstones. Fortschritte der Physik XX, S. 130.

[2]) In meinem Hause befindet sich ein unterirdischer Durchgang, in dem es möglich ist, durch Singen der richtigen Note freie Schwingungen von vielen Secunden Dauer zu erregen. Oft tritt es ein, dass an dem resonirenden Klange unterscheidbare Schwebungen zu hören sind. Die Breite des Durchganges ist etwa 4 Fuss und die Höhe etwa $6\frac{1}{2}$ Fuss.

$$\varphi = \Sigma \Sigma A_{pq} \cos \frac{p \pi x}{\alpha} \cos \frac{q \pi y}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ausgedrückt werden. Die Coefficienten A sind unabhängig von α und β. Durch die Anwendung dieser Formel sichern wir die Erfüllung der Bedingung an der Grenze, dass dort nämlich keine Geschwindigkeit quer gegen die Seiten vorhanden ist; die Art der Abhängigkeit der Grösse A von z und t hängt von den anderen Bedingungen des Problems ab.

Wir wollen den Fall vornehmen, in welchem die Bewegung an jedem Punkte harmonisch ist und von einer Bewegung in Richtung der Normale herrührt, die einer Wand ertheilt wird, welche sich bei $z = 0$ quer durch die Röhre zieht. Nehmen wir an, dass φ in allen Punkten proportional mit $e^{i\varkappa at}$ ist, so haben wir die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \frac{d^2 \varphi}{d y^2} + \frac{d^2 \varphi}{d z^2} + \varkappa^2 \varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Diese Gleichung muss wegen der conjugirten Eigenschaft der Functionen durch jedes Glied von (1) erfüllt werden. Daher haben wir zur Bestimmung von A_{pq} als eine Function von z:

$$\frac{d^2 A_{pq}}{d z^2} + \left[\varkappa^2 - \pi^2 \left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2}\right)\right] A_{pq} = 0 \ldots (3).$$

Die Lösung dieser Gleichung unterscheidet sich in der Form je nach dem Zeichen des Coefficienten von A_{pq}. Sind p und q beide Null, so ist der Coefficient nothwendiger Weise positiv; wenn aber p und q wachsen, ändert der Coefficient sein Zeichen. Ist der Coefficient positiv und wird μ^2 genannt, so lässt sich der allgemeine Werth von A_{pq} schreiben:

$$A_{pq} = B_{pq} e^{i(\varkappa a t + \mu z)} + C_{pq} e^{i(\varkappa a t - \mu z)} \quad . \quad . \quad . \; (4),$$

worin, da der Factor $e^{i\varkappa a t}$ hingeschrieben ist, B_{pq}, C_{pq} absolute Constanten sind. Indessen drückt das erste Glied in (4) eine Bewegung aus, welche sich nach der negativen Richtung fortpflanzt; eine solche ist aber durch die Bedingungen des

Problems ausgeschlossen und daher müssen wir für den p, q entsprechenden Ausdruck einfach nehmen:

$$\varphi = C_{pq} \cos \frac{p \pi x}{\alpha} \cos \frac{q \pi y}{\beta} e^{i(\varkappa a t - \mu z)}.$$

In diesem Ausdrucke kann C_{pq} complex sein; indem wir zu reellen Grössen übergehen und zwei neue reelle willkürliche Constanten nehmen, erhalten wir:

$$\varphi = [D_{pq} \cos(\varkappa a t - \mu z) + E_{pq} \sin(\varkappa a t - \mu z)] \times \cos \frac{p \pi x}{\alpha} \cos \frac{q \pi y}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wir haben jetzt die Form der Lösung in solchen Fällen zu betrachten, in denen der Coefficient von A_{pq} in (3) negativ ausfällt. Nennen wir denselben $-\nu^2$, so ist die (4) entsprechende Lösung:

$$A_{pq} = e^{i\varkappa a t}(B_{pq} e^{\nu z} + C_{pq} e^{-\nu z}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

woraus das erste Glied weggelassen werden muss, da dasselbe mit z unendlich wird. Wir erhalten demnach entsprechend (5):

$$\varphi = e^{-\nu z}[D_{pq} \cos \varkappa a t + E_{pq} \sin \varkappa a t] \times \cos \frac{p \pi x}{\alpha} \cos \frac{q \pi y}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die durch Combination aller Particularlösungen (5) und (7) erhaltene Lösung ist die allgemeinste Lösung des Problems und gestattet über den Querschnitt $z = 0$ einen in jedem Punkte sowohl in der Amplitude als auch in der Phase willkürlichen Werth von $\frac{d\varphi}{dz}$.

In einem grossen Abstande von der Bewegungsquelle werden die in (7) enthaltenen Glieder unmerklich, die Bewegung wird dann durch die Glieder von (5) allein dargestellt. Die Wirkung der Glieder, welche hohe Werthe von p und q enthalten, ist daher auf die Nachbarschaft der Quelle beschränkt; in einem mässigen Abstande werden alle plötzlichen Aenderungen und Unstetigkeiten in der Bewegung bei $z = 0$ allmälig beruhigt und verschwinden.

Fixiren wir unsere Aufmerksamkeit auf irgend eine einfache Schwingungsbewegung (für welche p und q nicht beide

verschwinden), und nehmen an, dass die Schwingungszahl von Null an aufwärts wächst, so sehen wir, dass die Wirkung, welche zuerst auf die Nachbarschaft der Bewegungsquelle beschränkt ist, sich allmälig immer weiter ausdehnt und sich, nachdem ein gewisser Werth passirt ist, bis zu einer unendlichen Entfernung fortpflanzt; die kritische Schwingungszahl ist die, welche den freien Schwingungen der entsprechenden Art nach zwei Dimensionen zukommt. Unterhalb des kritischen Punktes ist keine Arbeit erforderlich um die Bewegung aufrecht zu halten; oberhalb desselben muss ebenso viel Arbeit bei $z = 0$ geleistet werden, wie in derselben Zeit unendlich weit abgeleitet wird.

269. Wir wollen jetzt das Resultat der Zusammensetzung zweier Züge von ebenen Wellen von harmonischem Typus untersuchen, deren Amplituden und Wellenlängen einander gleich, deren Fortpflanzungsrichtungen aber gegen einander unter einem Winkel von 2α geneigt sind. Wir haben hierin ein Problem von nur zwei Dimensionen, insofern als Alles in den senkrecht zu den Schnittlinien der zwei Wellenfronten stehenden Ebenen dasselbe ist.

Zu irgend einem Zeitpunkte lassen sich die Lagen der Ebenen mit dem Maximum der Verdichtung für jeden Wellenzug durch parallele Linien darstellen, welche in gleichen Intervallen λ auf der Ebene des Papiers gezogen werden; von diesen Linien muss man annehmen, dass sie sich mit einer Geschwindigkeit a in einer zu ihrer Länge senkrecht stehenden Richtung fortbewegen. Sind beide Sätze von Linien gezogen, so wird das Papier in ein System von gleichen Parallelogrammen eingetheilt sein, welche in der Richtung des einen Satzes der Diagonalen vorschreiten. In jeder Ecke eines Parallelogrammes ist die Verdichtung verdoppelt durch die Uebereinanderlagerung von zwei Wellenzügen, und in dem Mittelpunkt eines jeden Parallelogrammes hat die Verdünnung aus demselben Grunde ein Maximum. Auf jeder Diagonale befindet sich also eine Reihe von Maxima und Minima der Verdichtung, welche ohne Aenderung in ihrer relativen Lage

und mit einer Geschwindigkeit $a : \cos\alpha$ vorschreiten. Zwischen jedem anliegenden Paar von Linien grösster und kleinster Verdichtung liegt eine diesen parallele Linie mit der Verdichtung Null, auf welcher sich die beiden Wellenzüge gegenseitig neutralisiren. Es ist besonders zu bemerken, dass, wenn das Wellenmuster sichtbar wäre (wie das entsprechende Wellenmuster auf der Oberfläche des Wassers, auf welches die ganze vorstehende Schlussweise anwendbar ist), es den Anschein haben würde, als wenn dieses Wellenmuster sich ohne Aenderung des Typus in einer Richtung vorwärts bewegte, die von denen der beiden Wellenzüge verschieden ist, und mit einer Geschwindigkeit, welche gleichfalls verschieden ist von den beiden, mit welchen sich resp. die beiden Züge bewegen.

Um das Resultat analytisch auszudrücken, wollen wir annehmen, dass die beiden Fortpflanzungsrichtungen auf gleiche Weise unter einem Winkel α gegen die x-Axe geneigt sind. Die Verdichtungen selbst können bezeichnet werden resp. durch:

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha - y\sin\alpha)$$

und

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha + y\sin\alpha);$$

dann lautet der Ausdruck für die Resultante:

$$\begin{aligned} s &= \cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha - y\sin\alpha) \\ &+ \cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha + y\sin\alpha) \\ &= 2\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at - x\cos\alpha)\cos\frac{2\pi}{\lambda}(y\sin\alpha) \quad \ldots (1). \end{aligned}$$

Aus (1) geht hervor, dass die Vertheilung von s über der Ebene xy parallel der x-Axe, mit ungeändertem Typus und mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit $a : \cos\alpha$ vorschreitet. In Hinsicht auf seine Abhängigkeit von y ist s ein Maximum, wenn $y\sin\alpha$ gleich 0, λ, 2λ, 3λ etc. ist, während s für die

zwischenliegenden Werthe von $y \sin \alpha$, das ist $\frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda$ etc. verschwindet.

Ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so dass die beiden Wellenzüge einander direct begegnen, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit parallel x unendlich, und (1) nimmt die folgende Form an:

$$s = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} a t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

diese Form stellt stationäre Wellen dar.

Das eben betrachtete Problem ist in der Wirklichkeit dasselbe wie das der Reflexion eines Zuges von ebenen Wellen an einer unendlich langen ebenen Wand. Da der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (1) eine gerade Function von y ist, so ist s mit Bezug auf die x-Axe symmetrisch und es existirt als Folge hiervon keine Bewegung quer gegen diese Axe. Unter diesen Umständen liegt es auf der Hand, dass die Bewegung durch die Einführung einer absolut unbeweglichen Wand längs der x-Axe auf keine Weise geändert wird. Bezeichnet α den Winkel zwischen der Oberfläche und der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Wellen, so ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Oerter der grössten Verdichtung (entsprechend den höchsten Erhebungen von Wasserwellen) längs der Wand fortbewegen, gleich $a : \cos \alpha$. Es mag bemerkt werden, dass die Luftdrucke kein Bestreben haben, die Wand als Ganzes fortzubewegen mit Ausnahme des Falles von absolut senkrechtem Einfall, da von diesen Drucken in jedem Augenblick ebenso viel negative wie positive vorhanden sind.

270. So lange das Medium, welches der Träger des Schalles ist, sich mit ununterbrochener Gleichförmigkeit fortsetzt, können ebene Wellen nach jeder Richtung mit constanter Geschwindigkeit und unveränderlichem Typus fortgepflanzt werden. Eine Störung tritt aber ein, wenn die Wellen irgend einen Theil erreichen, wo die mechanischen Eigenschaften des Mediums eine Aenderung erleiden. Das allgemeine Problem

der Schwingungen eines veränderlichen Mediums lässt sich vermuthlich mit unseren jetzigen mathematischen Kenntnissen noch nicht lösen; viele der dahin gehörigen Punkte von physikalischem Interesse stossen uns aber doch bei ebenen Wellen auf. Wir wollen annehmen, dass das Medium über und unter einer gewissen unendlich grossen Ebene ($x = 0$) gleichförmig ist, dass aber beim Hindurchgang durch diese Ebene eine plötzliche Aenderung in den mechanischen Eigenschaften eintritt, von denen die Fortpflanzung des Schalles abhängt — nämlich der Zusammendrückbarkeit und der Dichtigkeit. Auf der oberen Seite der Ebene (welche wir um die Vorstellung zu fixiren als horizontal annehmen können) schreitet ein Zug von ebenen Wellen so vor, dass er diese Ebene unter einem grössern oder kleinern Winkel trifft; das Problem besteht darin, die (gebrochene) Welle zu bestimmen, welche sich vorwärts in das zweite Medium hinein bewegt, und weiter die Welle, welche sich in das erste Medium zurückbewegt, oder die reflectirte. Zu allererst sind die Bewegungsgleichungen aufzustellen und die Grenzbedingungen auszudrücken.

In dem oberen Medium ist, wenn ϱ die natürliche Dichtigkeit und s die Verdichtung darstellt:

$$\text{Dichtigkeit} = \varrho(1 + s)$$

und

$$\text{Druck} = P(1 + As),$$

worin A einen Coefficienten, welcher von der Zusammendrückbarkeit abhängt, und P den nicht gestörten Druck bedeutet. Auf gleiche Weise haben wir für das untere Medium:

$$\text{Dichtigkeit} = \varrho_1(1 + s_1),$$

$$\text{Druck} = P(1 + A_1 s_1);$$

der nicht gestörte Druck ist auf beiden Seiten von $x = 0$ derselbe. Nehmen wir die z-Axe parallel der Schnittlinie der Ebene der Wellen mit der Trennungsfläche $x = 0$, so haben wir für das obere Medium (§. 244):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = V^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$\frac{d\varphi}{dt} + V^2 s = 0 \quad \ldots \quad (2),$$

worin

$$V^2 = PA : \varrho \quad \ldots \quad (3).$$

In ähnlicher Weise in dem untern Medium:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = V_1^2 \left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dy^2}\right) \quad \ldots \quad (4),$$

und

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + V_1^2 s_1 = 0 \quad \ldots \quad (5),$$

worin

$$V_1^2 = PA_1 : \varrho_1 \quad \ldots \quad (6).$$

Diese Gleichungen müssen in allen Punkten des Fluidums erfüllt werden. Weiter erfordern die Grenzbedingungen, dass (α) in allen Punkten der Trennungsfläche die Geschwindigkeiten senkrecht zu der Fläche für beide Fluida dieselben sein müssen, oder:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dx}, \text{ wenn } x = 0 \quad \ldots \quad (7);$$

dass (β) die Drucke dieselben sein müssen, woraus $A_1 s_1 = A s$, oder nach (2), (3), (5) und (6):

$$\varrho \frac{d\varphi}{dt} = \varrho_1 \frac{d\varphi_1}{dt}, \text{ wenn } x = 0 \quad \ldots \quad (8).$$

Um einen Wellenzug vom harmonischen Typus darzustellen, können wir annehmen, dass φ und φ_1 proportional $e^{i(ax+by+ct)}$ sind, worin $ax + by = \text{const.}$ die Richtung der Wellenebene giebt. Nehmen wir für die einfallende Welle:

$$\varphi = \varphi' e^{i(ax+by+ct)} \quad \ldots \quad (9),$$

so können die reflectirten und gebrochenen Wellen dargestellt werden resp. durch:

$$\varphi = \varphi'' e^{i(-ax+by+ct)} \quad \ldots \quad (10),$$

$$\varphi_1 = \varphi_1 e^{i(a_1 x+by+ct)} \quad \ldots \quad (11).$$

Der Coefficient von t ist in Folge der Periodicität nothwendiger Weise bei allen drei Wellen derselbe; der Coefficient von y muss ebenfalls für die einzelnen Wellen der gleiche sein,

da die Spuren aller Wellen auf der Trennungsebene sich zusammen bewegen müssen. Was den Coefficient von x betrifft, so geht aus der Substitution in die Differentialgleichungen hervor, dass sein Zeichen sich beim Uebergang von der einfallenden zu der reflectirten Welle ändert; in der That haben wir:

$$c^2 = V^2[(\pm a)^2 + b] = V_1^2[a_1^2 + b^2] \quad . \quad . \quad (12).$$

Nun ist $b : \sqrt{(a^2 + b^2)}$ der Sinus des Winkels, welcher von der x-Axe und der Normale an die Ebene der Wellen eingeschlossen ist, — in optischer Sprache der Sinus des Einfallswinkels; $b : \sqrt{(a_1^2 + b^2)}$ giebt auf gleiche Weise den Sinus des Brechungswinkels an. Werden diese Winkel ϑ, ϑ_1 genannt, so folgt aus (12), dass $\sin\vartheta : \sin\vartheta_1$ gleich dem constanten Verhältniss $V : V_1$ ist, — das wohlbekannte Sinusgesetz. Die Gesetze der Brechung und Reflexion folgen einfach aus der Verbindung der Thatsache, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit normal zu der Wellenstirn in jedem Medium constant ist, das heisst, unabhängig von der Richtung der Wellenstirn, mit der Gleichheit der Geschwindigkeiten der Spuren aller Wellen auf der Trennungsebene ($V : \sin\vartheta = V_1 : \sin\vartheta_1$).

Es bleiben noch die Grenzbedingungen (7) und (8) zu befriedigen.

Diese geben:

$$\left.\begin{array}{l} a(\varphi' - \varphi'') = a_1\varphi_1 \\ \varrho(\varphi' + \varphi'') = \varrho_1\varphi_1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

woraus:

$$2\varphi' = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho} + \frac{a_1}{a}\right)\varphi_1; \qquad 2\varphi'' = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho} - \frac{a_1}{a}\right)\varphi_1 \ldots (14).$$

Hierdurch wird die symbolische Lösung vervollständigt. Für ein reelles a_1 (und ϑ_1) erhalten wir Folgendes. Ist die einfallende Welle:

$$\varphi = \cos(ax + by + ct),$$

oder in Werthen von V, λ und ϑ:

$$\varphi = \cos\frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta + Vt) \quad . \quad . \quad (15),$$

so wird die reflectirte Welle:

$$\varphi = \frac{\frac{\varrho_1}{\varrho} - \frac{cotg\,\vartheta_1}{cotg\,\vartheta}}{\frac{\varrho_1}{\varrho} + \frac{cotg\,\vartheta_1}{cotg\,\vartheta}} \cos\frac{2\pi}{\lambda}(-x\cos\vartheta + y\sin\vartheta + Vt) \ldots (16),$$

und die gebrochene Welle wird:

$$\varphi_1 = \frac{2}{\frac{\varrho_1}{\varrho} + \frac{cotg\,\vartheta_1}{cotg\,\vartheta}} \cos\frac{2\pi}{\lambda_1}(x\cos\vartheta_1 + y\sin\vartheta_1 + V_1 t) \ldots (17).$$

Die Formel für die Amplitude der reflectirten Welle, nämlich:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\frac{\varrho_1}{\varrho} - \frac{cotg\,\vartheta_1}{cotg\,\vartheta}}{\frac{\varrho_1}{\varrho} + \frac{cotg\,\vartheta_1}{cotg\,\vartheta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

wurde hier unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Wellen von harmonischem Typus sind. Da dieselbe aber λ nicht enthält und keine Aenderung der Phase eintritt, so kann sie nach dem Fourier'schen Satz auf Wellen von irgend welchem Typus ausgedehnt werden.

Ist keine reflectirte Welle vorhanden, so muss sein $cotg\,\vartheta_1 : cotg\,\vartheta = \varrho_1 : \varrho$, woraus wir in Verbindung mit $(1 + cotg^2\vartheta_1) : (1 + cotg^2\vartheta) = V^2 : V_1^2$ schliessen:

$$\left(\frac{\varrho_1^2}{\varrho_2} - \frac{V^2}{V_1^2}\right) cotg^2\vartheta = \frac{V^2}{V_1^2} - 1 \quad \ldots\ldots \quad (19);$$

hierin liegt der Nachweis dafür, dass, wofern der Brechungsexponent $V_1 : V$ seinem Werthe nach zwischen der Einheit und $\varrho : \varrho_1$ liegt, stets ein Einfallswinkel vorhanden ist, unter welchem die Welle vollständig durchgelassen wird; sonst ist kein solcher Winkel vorhanden.

Da (18) (ausgenommen in Bezug auf das Zeichen) durch eine Aenderung von ϑ, ϑ_1; ϱ, ϱ_1 etc. nicht beeinflusst wird, so schliessen wir, dass eine in das zweite Medium unter einem Winkel ϑ_1 einfallende Welle in demselben Grössenverhältniss reflectirt wird, wie das mit einer in das erste Medium unter dem Winkel ϑ einfallenden Welle geschieht.

Als ein numerisches Beispiel wollen wir voraussetzen, dass das obere Medium aus Luft unter atmosphärischem Druck besteht und das untere aus Wasser. Setzen wir für $cotg\,\vartheta_1$ den Werth in Ausdrücken von ϑ und des Brechungsexponenten, so erhalten wir:

$$\frac{cotg\,\vartheta_1}{cotg\,\vartheta} = \frac{V}{V_1}\sqrt{1 - \left(\frac{V_1^2}{V^2} - 1\right) tang^2\vartheta} \quad \ldots (20),$$

oder, da $V_1 : V = 4{,}3$ angenähert ist:

$$\frac{cotg\,\vartheta_1}{cotg\,\vartheta} = 0{,}23\,\sqrt{(1 - 17{,}5\ tang^2\vartheta)},$$

welches zeigt, dass das Verhältniss der Cotangenten bis auf Null abnimmt, wenn ϑ von Null bis etwa 13° wächst; hierauf wird dieses Verhältniss imaginär, und zeigt dadurch totale Reflexion an, wie wir gleich sehen werden. Man muss daran denken, dass bei der Anwendung von optischen Ausdrücken auf die Akustik, das Wasser dasjenige Medium ist, welches man als das „dünnere" anzusehen hat. Das Verhältniss der Dichtigkeiten ist etwa 770 : 1, so dass:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{1 - 0{,}0003\sqrt{1 - 17{,}5\ tang^2\vartheta}}{1 + 0{,}0003\sqrt{1 - 17{,}5\ tang^2\vartheta}}$$
$$= 1 - 0{,}0006\sqrt{1 - 17{,}5\ tang^2\vartheta} \text{ sehr nahezu.}$$

Selbst bei senkrechtem Einfall ist die Reflexion fast vollkommen.

Sind beide Medien gasförmig, so haben wir $A_1 = A$, wenn die Temperatur constant ist; auch noch bei Berücksichtigung der Wärmeentwickelung bei einer Zusammendrückung wird bei den einfachen Gasen kein merklicher Unterschied zwischen A und A_1 herrschen. Ist nun aber $A_1 = A$, so wird $\varrho_1 : \varrho = sin^2\vartheta : sin^2\vartheta_1$; die Formel für die Intensität der reflectirten Welle lautet dann:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{sin\,2\vartheta - sin\,2\vartheta_1}{sin\,2\vartheta + sin\,2\vartheta_1} = \frac{tang\,(\vartheta - \vartheta_1)}{tang\,(\vartheta + \vartheta_1)} \quad \ldots (21),$$

zusammenfallend mit der, welche Fresnel für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht gegeben hat. In Uebereinstim-

mung mit dem Gesetz von Brewster verschwindet die Reflexion bei dem Einfallswinkel, dessen Tangente ist: $V : V_1$.

Anderenseits haben wir, wenn $\varrho_1 = \varrho$ ist, während die Ursache der Störung in der Aenderung der Zusammendrückbarkeit liegt:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{tang\,\vartheta_1 - tang\,\vartheta}{tang\,\vartheta_1 + tang\,\vartheta} = \frac{sin\,(\vartheta_1 - \vartheta)}{sin\,(\vartheta_1 + \vartheta)} \quad \ldots \quad (22),$$

in Uebereinstimmung mit der Formel von Fresnel für in der Einfallsebene polarisirtes Licht. In diesem Falle verschwindet die reflectirte Welle für keinen Einfallswinkel.

Im Allgemeinen ist, wenn $\vartheta = 0$:

$$\varphi'' : \varphi' = \frac{\varrho_1}{\varrho} - \frac{V}{V_1} : \frac{\varrho_1}{\varrho} + \frac{V}{T_1} \quad \ldots \quad (23);$$

so dass keine Reflexion eintritt, wenn $\varrho_1 : \varrho = V : V_1$. Bei Gasen ist $V^2 : V_1{}^2 = \varrho_1 : \varrho$ und dann:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\sqrt{\varrho_1} - \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho_1} + \sqrt{\varrho}} = \frac{V - V_1}{V + V_1} \quad \ldots \quad (24).$$

Wir wollen z. B. annehmen, dass nach einem senkrechten Einfall Reflexion an einer Fläche eintritt, welche Luft und Wasserstoff trennt. Wir haben:

$$\varrho = 0{,}001276, \quad \varrho_1 = 0{,}00008837;$$

woraus $\sqrt{\varrho} : \sqrt{\varrho_1} = 3{,}800$; das giebt:

$$\varphi'' = -\,0{,}5833\,\varphi'.$$

Das Verhältniss der Intensitäten, welches gleich dem der Quadrate der Amplituden ist, beträgt 0,3402 : 1, so dass ungefähr ein Drittel reflectirt wird.

Ist der Unterschied zwischen den beiden Medien sehr klein, und schreiben wir: $V_1 = V + \delta V$, so wird (24):

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{1}{2}\frac{\delta V}{V} \quad \ldots \quad (25).$$

Ist das erste Medium Luft von 0^0 C. und das zweite Medium Luft von t^0 C., so ist:

$$V + \delta V = V\sqrt{1 + 0{,}00366\,t},$$

so dass:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -0{,}00091\, t.$$

Das Verhältniss der Intensitäten der reflectirten und einfallenden Schalle beträgt daher: $0{,}83 \,.\, 10^{-6} \,.\, t^2 : 1$.

Als ein anderes Beispiel derselben Art können wir den Fall nehmen, in welchem das erste Medium aus trockener Luft und das zweite aus Luft von derselben Temperatur, aber mit Feuchtigkeit gesättigt, besteht. Bei 10° C. ist mit Wasserdampf gesättigte Luft um ungefähr ein 220stel leichter wie trockene Luft, so dass nahezu $\delta V = \frac{V}{440}$. Daher folgern wir aus (25), dass der reflectirte Schall etwa nur der 774000ste Theil des einfallenden Schalles ist.

Aus diesen Berechnungen lässt sich sehen, dass im Allgemeinen Reflexionen an warmer oder feuchter Luft sehr schwach sein müssen, obgleich natürlich die Wirkung durch Wiederholung verstärkt werden kann. Man muss gleichfalls daran denken, dass in der Wirklichkeit der Uebergang von einem Zustand der Dinge zu dem andern allmälig vor sich gehen wird und nicht plötzlich, wie die obige Theorie voraussetzt. Wächst der von dem Uebergangszustand eingenommene Raum auf einen beträchtlichen Bruchtheil der Wellenlänge an, so wird die Reflexion wesentlich geschwächt. Desswegen können wir erwarten, dass tiefe Schalle durch ein heterogenes Medium weniger frei hindurchgehen, wie hohe Schalle.

Die Reflexion des Schalles an Flächen, welche Gastheile von verschiedenen Dichten trennen, zog die Aufmerksamkeit von Prof. Tyndall auf sich. Derselbe hat zur Illustration dieses Gegenstandes verschiedene schlagende Versuche ersonnen [1]). Z. B. wurde der Schall von einer sehr hoch abgestimmten Pfeife durch eine dünne Röhre zu einer sensitiven Flamme geleitet, welche als Indicator diente. Durch Zwischenschieben einer Gasflamme, die aus einem gewöhnlichen Fleder-

---

1) Sound, 3rd. edition, p. 282.

mausbrenner kam, zwischen die Röhre und die sensitive Flamme, liess sich der grösste Theil der Wirkung abschneiden. Nicht nur so, sondern auch durch Halten der Flamme unter einem zweckmässigen Winkel, konnte der Schall durch eine andere Röhre hindurch in hinreichender Stärke reflectirt werden, um eine zweite sensitive Flamme zu erregen, welche jedoch der Einschaltung der reflectirenden Flamme selbst gegenüber ungestört weiter brennen musste.

Die vorstehenden Ausdrücke (16), (17), (18) gelten bei jeder Reflexion an einem „dichteren" Medium; ist indessen die Schallgeschwindigkeit in dem untern Medium grösser und überschreitet der Einfallswinkel den kritischen Winkel, so wird a_1 imaginär, und dann erfordern die Formeln eine Modification. In dem letzteren Fall ist es unmöglich, dass eine gebrochene Welle besteht, da dann selbst, wenn der Brechungswinkel 90° wäre, die Spur derselben auf der Trennungsebene nothwendiger Weise über die Spur der einfallenden Welle hinausgehen müsste.

Schreiben wir $-ia_1'$ an Stelle von a_1, so werden die symbolischen Gleichungen folgende:

Einfallende Welle:

$$\varphi = e^{i(ax + by + ct)},$$

Reflectirte Welle:

$$\varphi = \frac{\frac{\varrho_1}{\varrho} + i\frac{a_1'}{a}}{\frac{\varrho_1}{\varrho} - i\frac{a_1'}{a}}, \; e^{i(-ax + by + ct)},$$

Gebrochene Welle:

$$\varphi_1 = \frac{2}{\frac{\varrho_1}{\varrho} - i\frac{a_1'}{a}}, \; e^{i(-ia_1'x + by + ct)}.$$

Durch Ausscheidung des imaginären Theiles erhalten wir hieraus:

Einfallende Welle:

$$\varphi = \cos(ax + by + ct) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26),$$

Reflectirte Welle:

$$\varphi = \cos(-ax + by + ct + 2\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

Gebrochene Welle:

$$\varphi = \frac{2}{\left(\frac{\varrho_1^2}{\varrho^2} + \frac{a_1'^2}{a^2}\right)^{1/2}} e^{a_1' x} \cos(by + ct + \varepsilon) \,..\, (28),$$

worin:

$$tang\, \varepsilon = \frac{a_1' \varrho}{a \varrho_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Diese Formeln zeigen totale Reflexion an. Die Störung in dem zweiten Medium ist überhaupt nicht eine Welle im gewöhnlichen Sinne und sie wird in einem kleinen Abstande von der Trennungsfläche (x negativ) unmerklich. Berechnen wir a_1' aus (12) und drücken es in Werthen von ϑ und λ aus, so finden wir:

$$a_1' = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\sin^2 \vartheta - \frac{V^2}{V_1^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30);$$

diese Gleichung zeigt, dass die Störung nicht weiter wie wenige Wellenlängen in das zweite Medium eindringt.

Der Phasenunterschied zwischen der reflectirten und der einfallenden Welle beträgt $2\,\varepsilon$, wo:

$$tang\, \varepsilon = \frac{\varrho}{\varrho_1} \sqrt{tang^2 \vartheta - \frac{V^2}{V_1^2} \sec^2 \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Haben die Medien dieselbe Compressibilität, so ist $\varrho : \varrho_1 = V_1^2 : V^2$ und:

$$tang\, \varepsilon = \frac{V_1}{V} \sqrt{\frac{V_1^2}{V^2} tang^2 \vartheta - \sec^2 \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Da bei der Reflexion und Brechung kein Verlust an Energie eintritt, so muss die in irgend einer Zeit quer durch irgend einen Flächentheil der Stirn der einfallenden Welle geschickte Arbeit gleich der in derselben Zeit quer durch entsprechende Flächen der reflectirten und gebrochenen Wellen gesandten Arbeit sein. Diese entsprechenden Flächen stehen geradezu in dem Verhältniss:

$$\cos \vartheta : \cos \vartheta : \cos \vartheta_1;$$

und daher ist nach §. 245 (da τ für alle Wellen denselben Werth hat):

$$\cos\vartheta\ \frac{\varrho}{V}\ (\varphi'^2 - \varphi''^2) = \cos\vartheta_1\ \frac{\varrho_1}{V_1}\ \varphi_1^2,$$

oder da:

$$V : V_1 = \sin\vartheta : \sin\vartheta_1$$

$$\varrho\ cotg\,\vartheta\,(\varphi'^2 - \varphi''^2) = \varrho_1\ cotg\,\vartheta_1\ \varphi_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (33),$$

welches die Bedingung für die Energie ist und mit dem Resultat der Multiplication der beiden Grenzbedingungen (13) übereinstimmt.

Ist die Fortpflanzungeschwindigkeit in dem untern Medium grösser wie in dem obern, und übersteigt der Einfallswinkel den kritischen Winkel, so wird in das zweite Medium keine Energie übergeführt; in anderen Worten die Reflexion ist total.

Die Methode der vorliegenden Untersuchung ist wesentlich dieselbe wie die, welche Green in einem Aufsatz über die Reflexion und Brechung des Schalles [1]) angewendet hat. Der Fall des senkrechten Einfalles wurde zuerst von Poisson [2]) untersucht, welcher Formeln erhielt, die (23) und (24) entsprechen. Indessen waren diese Formeln schon von Young für die Reflexion des Lichtes gegeben. In einer spätern Arbeit [3]) behandelte Poisson den allgemeinen Fall von schiefem Einfall, indem er sich auf gasförmige Medien beschränkte, für welche das Gesetz von Boyle gilt; er kam durch eine sehr complicirte Rechnung zu einem Resultat, das äquivalent mit (21) ist. Gleichfalls wies er nach, dass die Energie der reflectirten und gebrochenen Wellen gleich der der einfallenden Welle seien.

271. Dehnt sich das zweite Medium unendlich weit nach abwärts mit vollkommener Gleichförmigkeit in seinen mechanischen Eigenschaften aus, so setzt sich die in dasselbe über-

---

1) Cambridge Transactions, 1838.

2) Mém. de l'Institut t. II, p. 305. 1819.

3) „Mémoire sur le mouvement des deux fluides élastiques superposés." Mém. de l'Institut t. X, p. 317. 1831.

gehende Welle continuirlich in ihm weiter fort. Wenn dagegen bei $x = -l$ eine zweite Aenderung in der Zusammendrückbarkeit, oder der Dichtigkeit, oder in beiden zugleich eintritt, so geht die Welle theilweise wieder zurück und trennt sich bei ihrer Ankunft an der ersten Oberfläche ($x = 0$) in zwei Theile, von denen der eine in das erste Medium übergeht, der andere rückwärts reflectirt wird, bei $x = -l$ sich wieder theilt und so fort. Durch Verfolgung des Vorschreitens dieser Wellen kann man die Lösung des Problemes erhalten, in der die resultirenden, reflectirten und übergegangenen Wellen aus einer unendlichen convergenten Reihe von Componenten zusammengesetzt auftreten, die sämmtlich einander parallel und harmonisch sind. Dies ist die gewöhnlich in der Optik bei dem entsprechenden Probleme befolgte Methode. Sie ist ganz streng, wenn auch vielleicht nicht immer genügend erläutert. Indessen scheint sie mir keinerlei Vortheil vor einer directeren Rechnung vorauszuhaben. Bei der folgenden Untersuchung wollen wir uns auf den Fall beschränken, wo das dritte Medium in seinen Eigenschaften dem ersten Medium ähnlich ist.

In dem ersten Medium haben wir:

$$\varphi = \varphi' e^{i(ax+by+ct)} + \varphi'' e^{i(-ax+by+ct)}.$$

In dem zweiten Medium:

$$\psi = \psi' e^{i(a_1 x+by+ct)} + \psi'' e^{i(-a_1 x+by+ct)}.$$

In dem dritten Medium:

$$\varphi = \varphi_1 e^{i(ax+by+ct)},$$

mit den Bedingungen:

$$c^2 = V^2(a^2 + b^2) = V_1^2(a_1^2 + b^2) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

An den beiden Trennungsflächen haben wir die Gleichheit der normalen Bewegungen und Drucke zu wahren; für $x = 0$ ist:

$$\left.\begin{aligned} a(\varphi' - \varphi'') &= a_1(\psi' - \psi'') \\ \varrho(\varphi' + \varphi'') &= \varrho_1(\psi' + \psi'') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

für $x = -l$:

$$\left.\begin{aligned} a_1(\psi' e^{-ia_1 l} - \psi'' e^{ia_1 l}) &= a\,\varphi_1 e^{-ial} \\ \varrho_1(\psi' e^{-ia_1 l} + \psi'' e^{ia_1 l}) &= \varrho\,\varphi_1 e^{-ial} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

woraus ψ' und ψ'' zu eliminiren sind. Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}(\varphi' - \varphi'')\cos a_1 l - i\,\frac{a_1\varrho}{a\varrho_1}\,(\varphi' + \varphi'')\sin a_1 l = \varphi_1 e^{-ial}\\ (\varphi' + \varphi'')\cos a_1 l - i\,\frac{a\varrho_1}{a_1\varrho}\,(\varphi' - \varphi'')\sin a_1 l = \varphi_1 e^{-ial}\end{aligned}\right\}\ldots (4);$$

und hieraus, wenn wir zur Abkürzung $\frac{a\varrho_1}{a_1\varrho} = \alpha$ setzen:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{\alpha - \frac{1}{\alpha}}{\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2i\cot g\, a_1 l} \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi'} = \frac{2e^{ial}}{2\cos a_1 l + i\sin a_1 l\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)} \quad \ldots\ldots (6).$$

Um zu reellen Grössen überzugehen, müssen diese Ausdrücke in die Form $Re^{i\vartheta}$ gebracht werden. Wenn a_1 reel ist, finden wir entsprechend der einfallenden Welle:

$$\varphi = \cos(ax + by + ct)$$

für die reflectirte Welle:

$$\varphi = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)\sin(-ax + by + ct - \varepsilon)}{\sqrt{4\cot g^2 a_1 l + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2}} \ldots (7),$$

und für die übergegangene Welle:

$$\varphi = \frac{2\cos(ax + by + ct + al - \varepsilon)}{\sqrt{4\cos^2 a_1 l + \sin^2 a_1 l\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2}} \ldots\ldots (8),$$

worin:

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\operatorname{tang} a_1 l \ldots\ldots\ldots (9).$$

Ist $\alpha = \frac{\cot g\,\vartheta}{\cot g\,\vartheta_1}\,\frac{\varrho_1}{\varrho} = 1$, so existirt keine reflectirte Welle; die übergegangene Welle wird dann dargestellt durch:

$$\varphi = \cos(ax + by + ct + al - a_1 l);$$

es sind also mit Ausnahme der Phasenänderung die Verhältnisse der Art, als wenn das ganze Medium gleichförmig gewesen wäre.

Ist l klein, so hat man angenähert für die reflectirte Welle:

$$\varphi = \frac{a_1 l}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) sin(-ax + by + ct),$$

eine Formel, welche sich auf den Fall anwenden lässt, wo die Platte dünn im Vergleich zur Wellenlänge ist. Da $a_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} cos\,\vartheta_1$, so geht hieraus hervor, dass für einen gegebenen Einfallswinkel die Amplitude sich umgekehrt wie λ_1 oder λ ändert.

In jedem Falle verschwindet die Reflexion, wenn $cotg^2 a_1 l = \infty$, das ist, wenn:

$$2 l \cos\vartheta_1 = m\lambda_1,$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet. Die Welle geht dann ganz über.

Bei senkrechter Incidenz wird die Intensität der Reflexion ausgedrückt durch:

$$\left(\frac{V\varrho}{V_1\varrho_1} - \frac{V_1\varrho_1}{V\varrho}\right) : \sqrt{4\,cotg^2 \frac{2\pi l}{V_1\tau} + \left(\frac{V\varrho}{V_1\varrho_1} + \frac{V_1\varrho_1}{V\varrho}\right)^2} \ldots (10).$$

Wir wollen nun annehmen, dass das zweite Medium incompressibel ist, so dass $V_1 = \infty$. Unser Ausdruck (10) wird dann:

$$-\frac{\pi\,\frac{\varrho_1 l}{\varrho\lambda}}{\sqrt{1 + \pi^2\left(\frac{\varrho_1 l}{\varrho\lambda}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11);$$

er zeigt, dass der Betrag der Reflexion von den relativen Massen solcher Mengen der Medien abhängt, deren Volumina in dem Verhältniss von $l : \lambda$ stehen. Es ist klar, dass das zweite Medium sich wie ein starrer Körper verhält und nur kraft seiner Trägheit wirkt. Ist diese hinreichend gross, so kann die Reflexion eine merklich totale werden.

Wir haben jetzt den Fall ins Auge zu fassen, wo a_1 imaginär ist. In den symbolischen Ausdrücken (5) und (6) sind $\cos a_1 l$ und $i \sin a_1 l$ reel, während α, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha - \frac{1}{\alpha}$ rein imaginär ausfallen. Setzen wir daher $a_1 = i a_1'$, $\alpha = i \alpha_1'$ und führen die Bezeichnungen der hyperbolischen Sinusse und Cosinusse (§. 170) ein, so erhalten wir:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{-i\left(\alpha' + \frac{1}{\alpha'}\right) \sinh a_1' l}{2 \cosh a_1' l - i\left(\alpha' - \frac{1}{\alpha'}\right) \sinh a_1' l},$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi'} = \frac{2 e^{i a l}}{2 \cosh a_1' l - i\left(\alpha' - \frac{1}{\alpha'}\right) \sinh a_1' l}.$$

Hieraus folgt, dass wenn die einfallende Welle dargestellt wird durch:

$$\varphi = \cos(ax + by + ct)$$

die reflectirte Welle gegeben ist durch:

$$\varphi = \frac{\left(\alpha' + \frac{1}{\alpha'}\right) \sinh a_1' l \cos(-ax + by + ct + \varepsilon)}{\sqrt{4 \cosh^2 a_1' l + \left(\alpha' - \frac{1}{\alpha'}\right)^2 \sinh^2 a_1' l}} \quad \ldots (12),$$

worin:

$$\cot g\, \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'} - \alpha'\right) \tanh a_1' l \quad \ldots\ldots (13),$$

dass ferner die übergegangene Welle ausgedrückt wird durch:

$$\varphi = \frac{2 \sin(ax + by + ct + al + \varepsilon)}{\sqrt{4 \cosh^2 a_1' l + \left(\alpha' - \frac{1}{\alpha'}\right)^2 \sinh^2 a_1' l}} \quad \ldots (14).$$

Der Nachweis, dass die Energieen der reflectirten und der übergegangenen Welle zusammen die ganze Energie der einfallenden Welle ausmachen, ist leicht zu führen. Da nämlich in dem vorliegenden Falle die entsprechenden Flächen der Wellenstirnen sämmtlich für alle drei Wellen einander gleich sind, so braucht man nur die Quadrate der in Gleichung

(7), (8) oder in Gleichungen (12), (14) gegebenen Amplituden zusammenzuzählen.

272. Diese Berechnungen der Reflexion und Brechung unter verschiedenen Umständen kann noch weiter verfolgt werden; indessen würde das Interesse daran mehr ein optisches wie ein akustisches sein. Von Wichtigkeit ist es stets daran zu denken, dass durch keine Anzahl von Reflexionen oder Brechungen, weder partiellen noch totalen, irgend ein Betrag von Energie zerstört wird. Was in der einen Richtung verloren geht, erscheint in der anderen wieder.

Wegen des grossen Unterschiedes in der Dichtigkeit ist die Reflexion an der Grenze zwischen Luft und irgend einem festen oder flüssigen Gegenstand gewöhnlich nahezu total. Schalle, welche in Luft erzeugt werden, lassen sich nicht leicht dem Wasser mittheilen und *vice versa* werden Schalle, deren Ursprung sich unter Wasser befindet, schwer in der Luft gehört. Ein Holzstab, oder ein Metalldraht, wirkt wie ein Sprachrohr, indem beide den Schall auf beträchtliche Entfernungen hin mit einem sehr kleinen Verluste fortpflanzen.

Capitel XIV.

Allgemeine Gleichungen.

273. Eine der ersten Fragen, welche in Verbindung mit dem allgemeinen Problem der Luftschwingungen nach drei Dimensionen stehen, und die sich von selbst aufdrängt, ist die Bestimmung der in einer unbegrenzten Atmosphäre erfolgenden Bewegung, die durch beliebige Anfangsstörungen hervorgerufen wird. Es möge angenommen werden, dass die Störung klein ist, so dass sich die gewöhnlichen angenäherten Gleichungen anwenden lassen, und weiter, dass die Anfangsgeschwindigkeiten der Art sind, dass sie von einem Geschwindigkeitspotential abgeleitet werden können, oder was nach §. 240 dasselbe sagt, dass keine Circulation vorhanden ist. Wird die letztere Bedingung verletzt, so gehört das Problem zu den Wirbelbewegungen, in welche wir nicht eingehen wollen. Gleichfalls werden wir fürs Erste annehmen, dass keine äusseren Kräfte auf das Fluidum wirken; die zu untersuchende Bewegung rührt also lediglich von einer Störung her, welche zu einer Zeit ($t = 0$), bei der wir unsere Untersuchung erst beginnen, schon existirte. Was vor dieser Zeit geschah, darum kümmern wir uns nicht. Die von uns einzuschlagende Methode ist nicht sehr verschieden von der von

Poisson[1]), welcher das genannte Problem zuerst mit Erfolg in Angriff genommen hat.

Bedeuten u_0, v_0, w_0 die Anfangsgeschwindigkeiten im Punkte x, y, z, ferner s_0 die Anfangsverdichtung, so haben wir (§. 244):

$$\varphi_0 = \int (u_0\,dx + v_0\,dy + w_0\,dz) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\dot{\varphi}_0 = -a^2 s_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wodurch die Anfangswerthe des Geschwindigkeitspotentiales φ und seines Differentialquotienten $\dot{\varphi}$ nach der Zeit bestimmt sind. Das uns vorliegende Problem liegt darin, den Werth von φ zur Zeit t aus den obigen Anfangswerthen und der auf alle Zeiten und Orte anwendbaren Gleichung:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - a^2 \nabla^2\right) \varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zu bestimmen. Ist φ bekannt, so geben die Derivirten hiervon die zu irgend einer Zeit gültigen Geschwindigkeitscomponenten.

Die symbolische Lösung von (3) kann geschrieben werden:

$$\varphi = \sin(ia\nabla t) \,.\, \vartheta + \cos(ia\nabla t) \,.\, \chi \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

worin ϑ und χ zwei willkürliche Functionen von x, y, z sind und $i = \sqrt{-1}$. Um dann ϑ und χ durch die Anfangswerthe von φ und $\dot{\varphi}$, welche wir resp. mit f und F bezeichnen wollen, zu bestimmen, haben wir nur zu beachten, dass (4), wenn $t = 0$ ist, giebt:

$$\varphi_0 = \chi, \qquad \dot{\varphi}_0 = ia\nabla \,.\, \vartheta;$$

so dass unser Resultat auch folgendermaassen ausgedrückt werden kann:

$$\varphi = \cos(ia\nabla t) \,.\, f + \frac{\sin(ia\nabla t)}{ia\nabla} \,.\, F \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

---

[1]) Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques. Mém. de l'Iinstitut, t. III, p. 121. 1820.

In dieser Gleichung braucht die Frage der Interpretation von ungeraden Potenzen von ∇ nicht beachtet zu werden, da die beiden symbolischen Functionen nur gerade Potenzen enthalten.

Wir sahen für den Fall, wo φ eine Function von x allein ist, in §. 245, dass für jeden Punkt der Werth von φ zur Zeit t von den Anfangswerthen von φ und $\dot{\varphi}$ in den Punkten abhängt, dessen Coordinaten $x - at$ und $x + at$ sind; von den Anfangszuständen in anderen Punkten ist derselbe ganz unabhängig. In dem vorliegenden Falle ist die uns offenstehende einfachste Annnahme die, dass der Werth von φ in einem Punkte O von den Anfangswerthen von φ und $\dot{\varphi}$ in denjenigen Punkten abhängt, die auf einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkt in O und dem Radius at liegen. Da kein Grund vorhanden ist, wesswegen wir einer Richtung den Vorzug vor der anderen geben sollten, werden wir weiter dazu geführt, den Ausdruck für den mittleren Werth einer auf einer Kugelfläche gültigen Function aufzusuchen, und zwar in Werthen der verschiedenen Differentialquotienten der Function im Mittelpunkte.

Nach der symbolischen Form der Maclaurin'schen Reihe kann der Werth von $F(x, y, z)$ in jedem Punkte einer Kugelfläche von dem Radius r geschrieben werden:

$$F(x,y,z) = e^{x\frac{d}{dx_0} + y\frac{d}{dy_0} + z\frac{d}{dz_0}} \, . \, F(x_0, y_0, z_0),$$

dabei ist der Mittelpunkt O der Kugel der Anfangspunkt der Coordinaten. Bei der Integration über die Kugelfläche sind $\frac{d}{dx_0}, \frac{d}{dy_0}, \frac{d}{dz_0}$ als Constanten anzusehen. Wir können dieselben vorübergehend mit l, m, n, bezeichnen, so dass also:

$$\nabla^2 = l^2 + m^2 + n^2.$$

Bezeichnen wir nun den Radius der Kugel mit r und ein Oberflächenelement der Kugel mit dS, so haben wir, weil wegen der Symmetrie der Kugel jede Function von $\frac{lx + my + nz}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2}}$ ohne Aenderung des Resultates der Integration durch dieselbe Function von z ersetzt werden kann:

$$\int\int e^{lx+my+nz}dS = \int\int (e^{\nabla})^{\frac{lx+my+nz}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}} dS$$

$$= \int\int e^{\nabla z}\, dS = 2\pi r \int_{-r}^{+r} e^{\nabla z}\, dS = \frac{2\pi r}{\nabla}(e^{\nabla r} - e^{-\nabla r})$$

$$= 4\pi r^2 \frac{sin(i\nabla r)}{i\nabla r}.$$

Der Mittelwerth von F auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius r wird demnach ausgedrückt durch das Resultat der mit F nach dem Symbol $\frac{sin(i\nabla r)}{i\nabla r}$ vorgenommenen Operation oder, wenn $\int\int d\sigma$ die über die Oberfläche ausgedehnte Integration mit Bezug auf Winkel bedeutet, durch:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int F(r)\,d\sigma = \frac{sin(i\nabla r)}{i\nabla r}.F \quad . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (5), so sehen wir, dass φ, insoweit dasselbe von den Anfangswerthen von $\dot{\varphi}$ abhängt, dargestellt wird durch:

$$\varphi = \frac{t}{4\pi}\int\int F(at)\,d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

oder in Worten: φ ist in jedem Punkte zur Zeit t das Product aus t und dem Mittelwerthe der Anfangswerthe von $\dot{\varphi}$ über der Oberfläche einer Kugel, welche rund um den fraglichen Punkt mit dem Radius at beschrieben wird.

Nach der Stokes'schen Regel (§. 95) oder einfach durch Prüfung der Gleichung (5) sehen wir, dass der Theil von φ, welcher von den Anfangswerthen von φ abhängt, von dem eben vorher hingeschriebenen durch Differentiation nach t und Aenderung der willkürlichen Function abgeleitet werden kann. Der vollständige Werth von φ zur Zeit t lautet demnach:

$$\varphi = \frac{t}{4\pi}\int\int F(at)\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int\int f(at)\,d\sigma \; . \; . \; . \quad (8),$$

und das ist das Resultat von Poisson[1]).

[1]) Eine andere Ableitung findet man in Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Physik, p. 317. 1876.

Wegen der Wichtigkeit des vorliegenden Problemes ist es vielleicht zweckmässig, die Lösung a posteriori zu verificiren. Wir haben zuerst zu beweisen, dass dieselbe der allgemeinen Differentialgleichung (3) genügt. Nehmen wir zunächst das erste Glied allein und achten auf die allgemeine symbolische Gleichung:

$$\frac{d^2}{dt^2}t = \frac{1}{t}\frac{d}{dt}t^2\frac{d}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

so finden wir aus (8):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{4\pi t}\frac{d}{dt}t^2\int\int\frac{d}{dt}F(at)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi at}\frac{d}{dt}\int\int\frac{dF(at)}{d(at)}\,dS,$$

worin dS das Oberflächenelement der Kugel $r = at$ bedeutet.

Nach dem Green'schen Satze ist aber:

$$\int\int\frac{dF(r)}{dr}\,dS = \int\int\int\nabla^2 F\,dV(r < at);$$

und daher:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{4\pi at}\frac{d}{dt}\cdot\int\int\int\nabla^2 F\,dV(r < at)$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\int\int\nabla^2 F\,dS(r = at) = \frac{a^2 t}{4\pi}\int\int\nabla^2 F\,d\sigma.$$

Nun ist $\int\int\nabla^2 F\,d\sigma$ dasselbe wie $\nabla^2\int\int F\,d\sigma$, und daher wird der Gleichung (3) thatsächlich genügt.

Da der zweite Theil von φ aus dem ersten durch Differentiation erhalten ist, so muss auch er die Fundamentalgleichung erfüllen.

Rücksichtlich der Anfangsbedingungen sehen wir, dass, wenn t in (8) gleich Null gemacht wird:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\int f(at)\,d\sigma\,(t = 0) = f(0).$$

$$\dot\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\int F(at)\,d\sigma(t=0) + \frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}t\int\int f(at)\,d\sigma(t=0),$$

das erste Glied hiervon wird an der Grenze $F(0)$. Ist $t = 0$, so haben wir weiter:

$$\frac{d^2}{dt^2} t \int\int f(at)\, d\sigma = 2 \frac{d}{dt} \int\int f(at)\, d\sigma \, (t = 0)$$

$$= 2a \int\int f'(at)\, d\sigma \, (t = 0) = 0,$$

weil die entgegengesetzt liegenden Elemente sich an der Grenze, wenn der Radius der Kugeloberfläche unendlich klein geworden ist, gegenseitig vernichten. Der Ausdruck in (8) genügt daher sowohl den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen, wie der allgemeinen Differentialgleichung.

274. Beschränkt sich die Anfangsstörung auf einen Raum T, so sind die Integrale in (8) §. 273 Null, wenn nicht ein Theil der Oberfläche der Kugel mit dem Radius $r = at$ in dem Raume T liegt. Es sei O ein Punkt ausserhalb T, r_1 und r_2 die Radien der kleinsten und der grössten um O beschriebenen Kugel, welche den Raum T schneiden. So lange wie $at < r_1$ ist, bleibt φ gleich Null. Liegt at zwischen r_1 und r_2, so kann φ wieder endlich sein; für grössere Werthe von at wie r_2 ist es aber wieder gleich Null. Die Störung beschränkt sich daher in jedem Momente auf die Theile des Raumes, für welche at zwischen r_1 und r_2 liegt. Die Grenze der Welle wird gebildet durch die Enveloppe der Kugeln mit dem Radius at, deren Mittelpunkte auf der Oberfläche von T liegen. „Ist t klein, so hat dieses System von Kugeln eine äussere Enveloppe von zwei Blättern, von denen das äussere ausserhalb der von der Gesammtheit der Kugeln gebildeten Schale liegt, das innere dagegen innerhalb dieser Schale. Das äussere Blatt bildet die äussere Grenze für den Theil des Mediums, in welchem die Dilatation von Null verschieden ist. Wächst t, so zieht sich das innere Blatt zusammen, schliesslich schneiden sich seine gegenüberliegenden Seiten, das Blatt ändert dann seinen Charakter, indem es nämlich, statt wie vorher in Bezug auf die Kugeln ein äusseres zu sein, ein inneres wird. Es dehnt sich dann aus, und bildet die innere Grenze der Schale,

in welcher die Verdichtungswelle eingeschlossen ist"[1]. Die folgenden Lagen der Wellenbegrenzungen sind daher eine Reihe von parallelen Flächen; jede Begrenzung pflanzt sich normal mit einer Geschwindigkeit gleich a fort.

Wenn zur Zeit $t = 0$ keine Bewegung vorhanden ist, so dass die Anfangsstörung nur in einer Aenderung der Dichtigkeit besteht, so wird der spätere Zustand durch das erste Glied von (8) §. 273 ausgedrückt. Wir wollen annehmen, dass die ursprüngliche Störung, die noch auf einen endlichen Bereich T beschränkt sein soll, aus Verdichtung allein besteht, ohne Verdünnung. Man könnte wohl denken, dass dieselbe Eigenthümlichkeit der resultirenden Welle während ihres ganzen Verlaufes anhängen würde. Indessen wäre ein solcher Schluss, wie Prof. Stokes bemerkte, irrig. Für solche Zeitwerthe, die kleiner wie $r_1 : a$ sind, ist das Potential in O gleich Null; dann wird es negativ (wobei s_0 positiv ist) und bleibt negativ, bis es wieder verschwindet, wenn $t = r_2 : a$; hierauf bleibt es wieder fortwährend gleich Null. Während φ sich verkleinert, befindet sich das Medium in O in einem Zustande der Verdichtung; wenn aber φ wieder bis auf Null anwächst, dann ist das Medium bei O in einem Zustande der Verdünnung. Die nach aussen fortgepflanzte Welle besteht demnach mindestens aus zwei Theilen, von denen der erste verdichtet und der letzte verdünnt ist. Welches auch der Charakter der ursprünglichen Störung innerhalb T sein mag, der schliessliche Werth von φ in jedem äusseren Punkte ist derselbe wie der Anfangswerth; daher ist, weil $a^2 s = - \dot{\varphi}$, die mittlere Verdichtung während des Durchganges der Welle, die von dem Integral $\int s\,dt$ abhängt, gleich Null. In dem Capitel über sphärische Wellen werden wir Gelegenheit finden, auf diesen Gegenstand zurückzukommen (§. 279).

Die in (8) §. 273 enthaltene allgemeine Lösung muss

---

[1]) Stokes, „Dynamical Theory of Diffraction," Camb. Trans. IX, p. 15.

natürlich den speciellen Fall von ebenen Wellen umfassen. Indessen werden einige wenige Worte über die Anwendung der allgemeinen Lösung auf diesen speciellen Fall nicht überflüssig sein. Es könnte nämlich auf den ersten Blick scheinen, als ob die Wirkung einer Störung, die im Anfange auf eine von zwei parallelen Ebenen eingeschlossene Schicht des Mediums beschränkt ist, auf einen bestimmten Punkt in keiner endlichen Zeit übergehen würde, wie es doch wirklich der Fall ist. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass φ_0 überall gleich Null ist, und dass innerhalb der fraglichen Schicht $\dot{\varphi}_0$ einen constanten Anfangswerth besitzt. Aus der Theorie der ebenen Wellen wissen wir nun, dass in irgend einem Punkte die Störung schliesslich vergehen wird nach Verlauf einer so grossen Zeit t, dass at gleich dem Abstande (d) des ins Auge gefassten Punktes von der am weitesten abliegenden Begrenzung des anfänglich erregten Bereiches ist. Anderenseits würde es sich aber, da die Kugel vom Radius at die betreffende Region zu schneiden nicht aufhört, aus den allgemeinen Formeln scheinbar ergeben, dass die Störung anhält. Es ist in der That richtig, dass φ endlich bleibt, doch ist dieses mit vorhandener Ruhe nicht unverträglich. Thatsächlich wird es sich bei der genauen Prüfung herausstellen, dass der mittlere Werth von $\dot{\varphi}_0$ multiplicirt mit dem Radius der Kugel derselbe ist, welches auch die Lage und die Grösse der Kugel sein mag, nur vorausgesetzt, dass letztere durch die Region der Anfangsstörung vollständig hindurch schneidet. Ist $at > d$, so bleibt φ demnach constant mit Rücksicht auf Raum und Zeit. Das Medium befindet sich also in Ruhe.

275. Bei zwei Dimensionen, wenn φ unabhängig von z ist, könnte man annehmen, dass die entsprechende Formel durch einfache Ersetzung der Kugel vom Radius at durch den Kreis von gleichem Radius erhalten wird. Das ist indessen nicht der Fall. Es lässt sich beweisen, dass der mittlere Werth einer Function $F(xy)$ über den Umfang eines Kreises vom Radius r gleich $J_0(ir\nabla)F_0$ ist, worin $i = \sqrt{-1}$,

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx_0^2} + \frac{d^2}{dy_0^2},$$

und J_0 die Bessel'sche Function von der Ordnung Null bedeutet, so dass:

$$\frac{1}{2\pi r}\int F(x,y)\,ds = \left(1 + \frac{r^2\nabla^2}{2^2} + \frac{r^4\nabla^4}{2^2.4^2} + \cdots\right)F,$$

und das weicht ab von dem, was zur Erfüllung der Fundamentalgleichung gefordert wird.

Das richtige auf zwei Dimensionen anwendbare Resultat kann aus der allgemeinen Formel erhalten werden. Das Oberflächenelement dS der Kugel lässt sich ersetzen durch $\frac{r\,dr\,d\vartheta}{\cos\psi}$, worin r, ϑ ebene Polarcoordinaten bedeuten und ψ den Winkel zwischen der Tangentenebene und derjenigen Ebene, in welcher die Bewegung vor sich geht. Daher:

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{(a^2t^2 - r^2)}}{at},$$

$F(at)$ wird durch $F(r,\vartheta)$ ersetzt, und somit:

$$\varphi = \int\int \frac{F(r,\vartheta)\,r\,dr\,d\vartheta}{4\pi a\sqrt{a^2t^2 - r^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

die Integration erstreckt sich über die Fläche des Kreises mit dem Radius $r = at$. Das andere Glied kann nach der Stokes'schen Regel erhalten werden.

Diese Lösung lässt sich auf die Bewegung einer Gasschicht zwischen zwei parallelen Ebenen anwenden oder auf die einer unbegrenzten gespannten Membran, welche von derselben Fundamentalgleichung abhängt.

276. Aus der Lösung in Werthen der Anfangsbedingungen können wir, wie gewöhnlich (§. 66), die Wirkung einer continuirlich erneuten Störung ableiten. Wir wollen annehmen, dass überall in dem Raume T (welchen wir schliesslich verschwinden lassen werden) zur Zeit t' eine gleichförmige Störung $\dot{\varphi}$, gleich $\Phi(t')\,dt'$ erregt wird. Der daraus zur Zeit t sich ergebende Werth von φ ist:

$$\frac{S}{4\pi a^2(t-t')}\,\Phi(t')\,dt',$$

worin S den Theil der Oberfläche der Kugel $r = a\,(t - t')$ bedeutet, welcher in T liegt; diese Grösse verschwindet, wenn nicht $a(t - t')$ zwischen den engen Grenzen r_1 und r_2 eingeengt ist. Schliesslich kann $t - t'$ durch $r : a$ und $\Phi(t')$ durch $\Phi\left(t - \frac{r}{a}\right)$ ersetzt werden. Und weiter wird dann das Resultat der Integration mit Bezug auf dt' gefunden, indem man T (das Volumen) für $\int a\,S\,dt'$ setzt. Daraus:

$$\varphi = \frac{T}{4\pi a^2 r}\,\Phi\left(t - \frac{r}{a}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die ursprünglich in irgend einem Punkte erzeugte Störung sich selbst symmetrisch nach allen Richtungen mit einer Geschwindigkeit a verbreitet und mit einer Amplitude, welche umgekehrt proportional der Entfernung ist. Da irgend welche Anzahl von Particularlösungen übereinander gelagert werden können, so lässt sich die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$\ddot{\varphi} = a^2 \nabla^2 \varphi + \Phi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

schreiben:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi a^2}\int\!\!\int\!\!\int \Phi\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{dV}{r} \quad . \; . \; . \quad (3),$$

worin r den Abstand des bei x, y, z gelegenen Elementes dV von O (wo φ gesucht wird) und $\Phi\left(t - \frac{r}{a}\right)$ den Werth von Φ für den Punkt x, y, z zur Zeit $t - \frac{r}{a}$ bedeutet. Ergänzende Glieder, welche im ganzen Raume die Gleichung $\ddot{\varphi} = a^2\nabla^2\varphi$ erfüllen, können natürlich unabhängig von dem Vorigen auftreten.

Nach unserer früheren Bezeichnungsweise (§. 244) haben wir:

$$\Phi = \frac{d}{dt}\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz);$$

wir hatten weiter angenommen, dass $X dx + Y dy + Z dz$ ein vollständiges Differential ist. Kräfte, unter deren Wirkung das Medium sich nicht selbst ins Gleichgewicht bringen könnte, sind ausgeschlossen, wie z. B. eine an Grösse und Richtung innerhalb des Raumes T gleichförmige Kraft, welche aber ausserhalb dieses Raumes verschwindet. Die Natur der durch Φ dargestellten Störung wird vielleicht am besten erkannt, indem man den äussersten Fall betrachtet, wo Φ überall mit Ausnahme eines kleinen Volumens verschwindet, das man sich ohne Grenzen kleiner und kleiner werden denkt, während die Grösse von Φ der Art wächst, dass die ganze Wirkung endlich bleibt. Integriren wir dann Gleichung (2) über einen kleinen Raum, der den Punkt P, auf welchen Φ sich schliesslich concentrirt, einschliesst, so finden wir an der Grenze:

$$0 = a^2 \int\int \frac{d\varphi}{dn}\, dS + \int\int\int \Phi\, dV \quad . \; . \; . \quad (4),$$

und diese Gleichung zeigt, dass Φ dargestellt werden kann durch eine ihm proportionale Zufuhr oder Wegnahme von Fluidum an dem fraglichen Punkte. Die einfachste Schallquelle ist daher analog einem Brennpunkt in der Theorie der Wärmeleitung oder einer Elektrode in der Elektricitätstheorie.

277. Die vorstehenden Ausdrücke sind allgemein mit Hinsicht auf die Beziehung der betrachteten Functionen zur Zeit. In den meisten Anwendungen, mit welchen wir zu thun haben, wird es aber zweckmässig sein, die Bewegung nach dem Fourier'schen Satze zu zerlegen und die einfachen harmonischen Bewegungen von verschiedenen Perioden einzeln zu behandeln, indem man, wenn es nöthig ist, nachher die Resultate addirt. Der Werth von φ und Φ kann, wenn er in jedem Punkte des Raumes einfach harmonisch ist, in der Form $R \cos(nt + \varepsilon)$ ausgedrückt werden, wo R und ε unabhängig von der Zeit, aber veränderlich von Punkt zu Punkt sind. Da aber die Hinzufügung des Ausdruckes

$iR\sin(nt+\varepsilon)$ in vielen Fällen zu grösserer Einfachheit führt, weil derselbe mit dem vorigen zusammen $Re^{i(nt+\varepsilon)}$ oder $Re^{i\varepsilon}\,.\,e^{int}$ macht, so wollen wir einfach annehmen, dass alle Functionen, welche in ein Problem eingehen, proportional e^{int} sind, wobei die Coefficienten im Allgemeinen complex sein werden. Nachdem unsere Operationen ausgeführt sind, können die reellen und imaginären Theile getrennt werden; jeder von denselben stellt eine Lösung des Problemes dar.

Da φ proportional e^{int} ist, so haben wir $\ddot{\varphi} = -n^2\varphi$; die Differentialgleichung wird:

$$\nabla^2\varphi + \varkappa^2\varphi + a^{-2}\Phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

in welcher der Kürze halber $\varkappa$ an Stelle von $n:a$ geschrieben ist. Bedeutet λ die Wellenlänge der Schwingung mit der fraglichen Periode, so haben wir:

$$\varkappa = \frac{n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Um (3) des vorigen Abschnittes dem vorliegenden Falle anzupassen, ist es nur nöthig, darauf zu achten, dass die Einsetzung von $t - \frac{r}{a}$ für t dadurch bewirkt wird, dass man den Factor $e^{-in\frac{r}{a}}$ oder $e^{-i\varkappa r}$ einführt. Also:

$$\Phi\left(t - \frac{r}{a}\right) = e^{-i\varkappa r}\,\Phi(t),$$

die Lösung von (1) ist demnach:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint \frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\,\Phi\,dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

zu welcher noch jede Lösung von $\nabla^2\varphi + \varkappa^2\varphi = 0$ hinzuaddirt werden kann.

Haben die bewegenden Kräfte sämmtlich dieselbe Phase und ist der Bereich, in welchem dieselben wirken, sehr klein im Vergleich mit der Wellenlänge, so kann $e^{-i\varkappa r}$ aus dem Integralzeichen herausgezogen werden; wir dürfen somit in hinreichender Entfernung setzen:

$$\varphi = \frac{e^{-i\varkappa r}}{4\pi a^2 r}\iiint \Phi\,dV,$$

oder in reellen Grössen, nachdem wir den Zeitfactor wiederhergestellt und $\int\int\int \Phi\, dV$ durch Φ_1 ersetzt haben:

$$\varphi = \Phi_1 \frac{\cos(nt - \varkappa r + \varepsilon)}{4\pi a^2 r} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Um zu verificiren, dass (3) der Differentialgleichung (1) genügt, können wir wie in der gewöhnlichen Potentialtheorie vorgehen. Fassen wir ein Element des Integrales zu irgend einer Zeit ins Auge, so haben wir zunächst zu zeigen, dass:

$$\varphi = \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

der Gleichung $\nabla^2\varphi + \varkappa^2\varphi = 0$ genügt in den Punkten, für welche r endlich ist. Der einfachste Weg hierzu ist der, ∇^2 in Polarcoordinaten mit Bezug auf das Element selbst als Pol auszudrücken. Dann ergiebt sich:

$$\nabla^2 \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2} r \cdot \frac{e^{-i\varkappa r}}{r}$$

$$= -\varkappa^2 \frac{e^{-i\varkappa r}}{r}.$$

Wir schliessen, dass (3) der Gleichung $\nabla^2\varphi + \varkappa^2\varphi = 0$ in all denjenigen Punkten genügt, in welchen Φ verschwindet. Für einen Punkt, in welchem Φ nicht verschwindet, können wir alle diejenigen Elemente ausser Rechnung lassen, welche in einer endlichen Entfernung von jenem abliegen (da diese nur Glieder liefern, die $\nabla^2\varphi + \varkappa^2\varphi = 0$ erfüllen). Für das Element in einer unendlich kleinen Entfernung lässt sich in diesem Punkte weiter $e^{-i\varkappa r}$ durch die Einheit ersetzen. Daher haben wir im Ganzen:

$$(\nabla^2 + \varkappa^2)\varphi = \frac{1}{4\pi a^2}\nabla^2 \int\int\int \Phi \frac{dV}{r} + \frac{1}{a^2}\Phi,$$

genau wie in dem Poisson'schen Satze für das gewöhnliche Potential[1]).

278. Die Wirkung einer über die Oberfläche S vertheilten Kraft lässt sich als Grenzfall aus (3) §. 277 erhalten.

---

[1]) Siehe Thomson und Tait's Theoret. Physik, §. 491.

$\Phi d V$ wird ersetzt durch $\Phi b d S$, wo b die Dicke der Schicht bedeutet; an der Grenze können wir schreiben: $\Phi b = \Phi_1$. Daher:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi a^2} \int\int \Phi_1 \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Der Werth von φ ist an beiden Seiten von S derselbe, aber bei seinen Derivirten tritt Discontinuität auf. Wird dn normal zu S nach aussen gezogen, so giebt (4) §. 276:

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 + \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2 = -\frac{1}{a^2} \Phi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)^{1)}.$$

Besteht die Oberfläche S aus einer Ebene, so ist das Integral in (1) augenscheinlich symmetrisch mit Bezug auf dieselbe, und daher:

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_1 = \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_2.$$

Wenn demnach $\frac{d\varphi}{dn}$ die gegebene Normalgeschwindigkeit des mit der Ebene in Berührung stehenden Fluidums bedeutet, so wird der Werth von φ bestimmt durch:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int\int \frac{d\varphi}{dn} \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

dieses Resultat ist von grosser Wichtigkeit. Um dasselbe in Werthen von reellen Grössen auszudrücken, können wir setzen:

$$\frac{d\varphi}{dn} = P e^{i(nt+\varepsilon)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wo P und ε reelle Functionen der Lage von dS sind. Die symbolische Lösung wird dann:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int\int P e^{i(nt - \varkappa r + \varepsilon)} \frac{dS}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

woraus wir nach Wegwerfung des imaginären Theiles erhalten:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int\int P \frac{\cos(nt - \varkappa r + \varepsilon)}{r} dS \ldots (6)$$

1) Helmholtz, Crelle, Bd. 57, S. 21.

entsprechend:

$$\frac{d\varphi}{dn}\,P\cos(nt+\varepsilon) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7).$$

Dieselbe Methode lässt sich auf den allgemeinen Fall anwenden, wo die Bewegung nicht darauf beschränkt bleibt, eine einfach harmonische zu sein. Wir haben:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int V\left(t-\frac{r}{a}\right).\frac{dS}{r} \;\ldots\; (8),$$

worin durch $V\left(t-\frac{r}{a}\right)$ die Normalgeschwindigkeit des Elementes dS in der Ebene zur Zeit $t-(r:a)$ bezeichnet ist, das heisst zu einer Zeit $r:a$ vor der, bei welcher φ berechnet wird.

Um die Lösung des Problemes für die unbegrenzte Masse von Fluidum, welche auf einer Seite einer unendlich grossen Ebene liegt, zu vervollständigen, haben wir den allgemeinsten Werth von φ, der mit $V=0$ verträglich ist, hinzuzufügen. Dieser Theil des Problemes ist mit dem allgemeinen Probleme der Reflexion an einer unendlich grossen starren Ebene identisch [1]).

Es liegt auf der Hand, dass die Wirkung des Zwanges durch Einführung von fingirten Anfangsverschiebungen und Kräften auf der andern Seite der Ebene dargestellt wird, welche Verschiebungen und Kräfte in Verbindung mit den thatsächlich auf der ersten Seite existirenden, ein in Bezug auf die Ebene vollkommen symmetrisches System bilden. Welches auch die Anfangswerthe von φ und $\dot{\varphi}$ sein mögen, die irgend einem Punkte der ersten Seite zukommen, dieselben Werthe müssen auch dem Bilde dieses Punktes zugeschrieben werden; auf gleiche Weise muss, welche Function von der Zeit auch Φ im ersten Punkte sein mag, in dem zweiten Punkte Φ dieselbe Function der Zeit sein. Unter solchen Umständen ist es klar, dass für alle kommenden Zeiten φ mit Bezug auf die Ebene symmetrisch und demnach die Normalgeschwin-

[1]) Poisson, Journal de l'école polytechnique, t. VII. 1808.

digkeit gleich Null sein wird. So weit es dann die Bewegung auf der ersten Seite betrifft, tritt dort keine Aenderung ein, wenn die Ebene entfernt wird, und das Fluidum sich unbegrenzt nach allen Richtungen erstreckt, vorausgesetzt, dass die Zustände auf der zweiten Seite der genaue Reflex der auf der ersten Seite sind. Wenn dieses eingesehen, dann liegt die allgemeine Lösung des Problemes für ein von einer unendlich grossen Ebene begrenztes Fluidum in den Formeln (8) §. 273, (3) §. 277 und (8) des gegenwärtigen Abschnittes. Dieselben geben das Resultat von willkürlichen Anfangsbedingungen (φ_0 und $\dot{\varphi}_0$), willkürlich angreifenden Kräften (Φ) und willkürlicher Bewegung der Ebene (V).

Gemessen durch das resultirende Potential, ist daher eine Quelle von gegebener Grösse, d. h. eine Quelle, an der eine bestimmte Zufuhr oder Abfuhr von Fluidum stattfindet, doppelt so wirksam, wenn sie nahe einer starren Ebene, als wenn sie im Freien liegt; ferner bleibt das Resultat schliesslich dasselbe, ob nun die Quelle auf einen Punkt nahe der Ebene concentrirt ist, oder von einer entsprechenden Normalbewegung der Fläche der Ebene selbst herrührt.

Die Einwirkung der Ebene besteht darin, die wirksamen Drucke, welche sich bei der Quelle der Ausdehnung und Zusammenziehung entgegensetzen, zu verdoppeln, und deshalb auch die totale ausgesandte Energie zu verdoppeln. Da diese Energie sich nur in der Hälfte des Winkelraumes, wie bei der freien Luft, verbreitet, so wird die Intensität des Schalles vervierfacht, was einer doppelten Amplitude oder doppeltem Potential (§. 245) entspricht.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die vorgeschriebene Zustandsbedingung auf der unendlich grossen Ebene, anstatt $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ zu sein, $\varphi = 0$ ist. In diesem Falle muss die fingirte Vertheilung von φ_0, $\dot{\varphi}_0$, Φ auf der zweiten Seite der Ebene die entgegengesetzte von der auf der ersten Seite sein, so dass die Summe der Werthe in zwei correspondirenden Punkten immer Null ist. Das sichert, dass auf der Symmetrieebene selbst φ überall verschwindet.

Es möge nun zunächst vorausgesetzt werden, dass wir zwei parallele Flächen S_1, S_2 haben, getrennt durch den unendlich kleinen Zwischenraum dn, und dass der Werth von Φ_1 auf der zweiten Fläche gleich und entgegengesetzt dem Werthe von Φ_1 auf der ersten ist. Gehen wir durch S_1 hindurch, so tritt dort nach (2) eine endliche Aenderung in dem Werthe von $\frac{d\varphi}{dn}$ um den Betrag $\Phi_1 : a^2$ ein; beim Hindurchgange durch S_2 erfolgt aber dieselbe endliche Aenderung in umgekehrter Richtung. Wird dn ohne Grenze verkleinert und ersetzen wir $\Phi_1\, dn$ durch Φ_{11}, so ist $\frac{d\varphi}{dn}$ zwar dasselbe auf den beiden Seiten des Doppelblattes, aber in dem Werthe von φ tritt eine Discontinuität um den Betrag $\Phi_{11} : a^2$ ein. Zur selben Zeit wird (1):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi a^2} \int\int \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) \Phi_{11}\, dS \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Ist die Fläche S eben, so sind die Werthe von φ auf beiden Seiten derselben numerisch gleich und daher nahe an der Fläche selbst:

$$\varphi = \pm \frac{1}{2} a^{-2} \Phi_{11}.$$

Deshalb kann (9) geschrieben werden:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int\int \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) \varphi\, dS \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

worin das φ unter dem Integralzeichen das Flächenpotential bedeutet, positiv auf der einen und negativ auf der anderen Seite, welches von der Wirkung der Kräfte auf S herrührt. Die Richtung von dn ist nach der Seite hingerechnet, auf welcher φ ermittelt werden soll.

279. Das Problem von kugelförmigen Wellen, welche von einem Punkte aus divergiren, hat sich uns schon aufgedrängt und ist auch einigermaassen durchgenommen worden. Wegen seiner Wichtigkeit erfordert es aber eine detaillirtere Behandlung. Nehmen wir das Centrum der Symmetrie als Pol, so ist das Geschwindigkeitspotential eine Function von r allein, und es redu-

cirt sich nach (§. 241) ∇^2 auf $\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$ oder auf $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r$.
Die Gleichung der freien Bewegung (3) §. 273 wird daher:

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} = a^2 \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

woraus, wie in §. 245:

$$r\varphi = f(at - r) + F(at + r) \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Die Werthe der Geschwindigkeit und Condensation sind durch Differentiation nach den Formeln:

$$u = \frac{d\varphi}{dr}, \quad s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

zu finden.

Wie bei einer Dimension stellt das erste Glied eine Welle vor, welche in der Richtung der wachsenden r vorwärtseilt, d. h. eine divergirende Welle, und das zweite Glied eine nach dem Pole hin convergirende Welle. Die letztere besitzt in sich nicht viel Interesse. Beschränken wir unsere Aufmerksamkeit auf die divergirende Welle, so haben wir:

$$u = -\frac{f(at - r)}{r^2} - \frac{f'(at - r)}{r}; \quad as = -\frac{f'(at - r)}{r} \quad \ldots \quad (4).$$

Ist r sehr gross, so kann das durch r^2 dividirte Glied vernachlässigt werden, und dann ist annähernd:

$$u = as \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

dieselbe Beziehung, welche wir für eine ebene Welle erhalten haben. Man konnte dieses Resultat erwarten.

Ist der Typus harmonisch, so hat man:

$$r\varphi = A e^{i\varkappa(at - r + \vartheta)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

oder, wenn nur der reelle Theil zurückbehalten wird:

$$r\varphi = A \cos\frac{2\pi}{\lambda}(at + \vartheta - r) \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Ist eine divergirende Welle auf eine kugelförmige Schale beschränkt, innerhalb und ausserhalb derselben weder Verdichtung noch Geschwindigkeit vorhanden ist, so wird der Charakter der Welle durch eine bemerkenswerthe zuerst von

Stokes[1]) aufgefundene Beziehung eingeengt. Aus den Gleichungen (4) erhält man:

$$(as - u)\, r^2 = f(at - r),$$

ein Zeichen, dass der Werth von $f(at - r)$ sowohl innerhalb wie ausserhalb der Schale, auf welche die Welle begrenzt bleibt, derselbe, nämlich Null, ist. Daher hat man nach (4), wenn α und β Radien bedeuten, von denen der eine kleiner, der andere grösser wie die entsprechenden Grenzwerthe der Radien der Schale sind:

$$\int_\alpha^\beta s r\, dr = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

welches der Ausdruck für die erwähnte Relation ist. Wie in §. 274 sehen wir, dass eine Verdichtungs- oder Verdünnungswelle nicht allein für sich bestehen kann. Wird der Radius gross im Vergleich mit der Dicke, so kann die Veränderlichkeit von r in dem Integrale vernachlässigt werden; (8) drückt dann aus, dass die mittlere Verdichtung Null ist.

Wenden wir die allgemeine Lösung (2) darauf an, die aus willkürlichen Anfangszuständen sich ergebende Bewegung abzuleiten, so müssen wir daran denken, dass diese Lösung in dieser Form zu allgemein für den erwähnten Zweck ist, weil sie den Fall verdeckt, in welchem der Pol selbst eine Quelle oder ein Platz ist, wo mit Verletzung der Continuitätsgleichung Fluidum eingeführt oder weggenommen wird. Der gesammte Strom quer durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius r ist $4\pi r^2 u$, oder nach (2) und (3):

$$-4\pi\{f(at-r) + F(at+r)\} + 4\pi r\{F'(at+r) - f'(at-r)\},$$

so dass, wenn in dem Pole keine Quelle liegt, $f(at - r) + F(at + r)$, oder $r\varphi$, mit r verschwindet. Daher:

$$f(at) + F(at) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

eine Gleichung, welche für alle positiven Werthe des Argumentes gültig sein muss[2]).

---

[1]) Phil. Mag. XXXIV, p. 52. 1849.

[2]) Die Lösung für kugelförmige Schwingungen lässt sich ohne Benutzung von (1) erhalten durch Ueberlagerung von ebenen Wellenzügen,

Durch die bekannten Anfangszustände sind die Werthe von u und s für die Zeit $t = 0$ und für alle (positiven) Werthe von r bestimmt. Werden diese Anfangswerthe dargestellt durch u_0 und s_0, so erhalten wir aus (2) und (3):

$$\left.\begin{aligned} f(-r) + F(r) &= r\int u_0\, dr \\ f(-r) - F(r) &= a\int s_0\, r\, dr \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

wodurch die Function f für alle negativen Argumente und die Function F für alle positiven Argumente bestimmt ist. Die Form von f für positive Argumente ergiebt sich aus (9) und dann wird die ganze nachfolgende Bewegung durch (2) gegeben. Die Form von F für negative Argumente ist nicht erforderlich.

Die Anfangsstörung theilt sich selbst in zwei Theile, welche nach entgegengesetzten Richtungen forteilen; in jedem derselben pflanzt sich $r\varphi$ mit constanter Geschwindigkeit fort; die nach innen eilende Welle wird continuirlich an dem Pole reflectirt. Da die dort zu erfüllende Zustandsbedingung $r\varphi = 0$ lautet, so ist dieser Fall einigermaassen dem einer parallelen von einem offenen Ende begrenzten Pfeife ähnlich; wir können hieraus vielleicht besser verstehen, warum der Verdichtungswelle, welche von dem Freiwerden einer Masse von verdichteter Luft rund um den Pol herrührt, unmittelbar eine Verdünnungswelle folgt.

280. Kehren wir jetzt zu dem Falle eines Zuges von harmonischen Wellen zurück, welche continuirlich nach aussen von dem Pole als Quelle forteilen; wir wollen die Beziehung zwischen dem Geschwindigkeitspotentiale und der Menge von Fluidum, die man sich abwechselnd eingeführt und weggenommen denken muss, aufsuchen. Ist das Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = -\frac{A}{4\pi r}\cos\varkappa\,(at - r) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

---

die symmetrisch zum Pole liegen, und die symmetrisch nach allen Richtungen nach aussen vorwärts eilen.

so haben wir, wie in dem vorhergehenden Abschnitte, für den gesammten durch eine Kugel vom Radius r gehenden Strom:

$$4\pi r^2 \frac{d\varphi}{dr} = A\left\{\cos\varkappa(at-r) - \varkappa r \sin\varkappa(at-r)\right\} = A\cos\varkappa at,$$

wenn r klein genug ist. Wird der Maximalbetrag des eingeführten Fluidums A genannt, so giebt Gleichung (1) das entsprechende Potential.

Es muss bemerkt werden, dass, wenn die Quelle, gemessen durch N, endlich ist, das Potential und die Druckvariation (proportional mit $\dot{\varphi}$) im Pole unendlich sind. Dies schliesst aber nicht, wie man zunächst annehmen könnte, eine unendliche Ausgabe von Energie in sich. Wird der Druck in zwei Theile getheilt, von denen der eine dieselbe Phase wie die Geschwindigkeit und der andere dieselbe Phase wie die Beschleunigung hat, so findet man, dass der erstere Theil, von welchem die Arbeit abhängt, endlich ist. Der unendliche Theil des Druckes thut im Ganzen keine Arbeit, sondern hält nur die Schwingung der Luft unmittelbar rund um die Quelle herum, deren wirksame Trägheit unendlich gross ist, aufrecht.

Wir wollen jetzt die Energie untersuchen, welche vo einer einfachen Quelle von gegebener Grösse ausgesandt wird, indem wir der grösseren Allgemeinheit halber annehmen, dass die Quelle im Scheitel eines starren Kegels von der gegebenen Oeffnung ω gelegen ist. Beträgt die Menge des an der Quelle eingeführten Fluidums $A \cos \varkappa at$, so haben wir schliesslich:

$$\omega r^2 \frac{d\varphi}{dr} = A \cos \varkappa at,$$

entsprechend:

$$\varphi = -\frac{A}{\omega r} \cos \varkappa (at - r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

woraus:

$$\dot{\varphi} = \frac{\varkappa a A}{\omega r} \sin \varkappa (at - r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

und:

$$\omega r^2 \frac{d\varphi}{dr} = A\left\{\cos\varkappa(at-r) - \varkappa r \sin\varkappa(at-r)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Daher erhalten wir, wie in §. 245, weil $\delta p = -\varrho \dot{\varphi}$ ist, wenn dW die in der Zeit dt ausgegebene Arbeit bezeichnet:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\varrho \varkappa a A^2}{\omega r} \sin \varkappa (at - r) \cos \varkappa (at - r)$$
$$+ \varrho \frac{\varkappa^2 a A^2}{\omega} \sin^2 \varkappa (at - r).$$

Auf der rechten Seite ist das erste Glied ganz periodisch und in dem zweiten Gliede ist der Mittelwerth von $\sin^2 \varkappa (at - r)$ gleich $\frac{1}{2}$. Daher haben wir schliesslich:

$$W = \frac{\varrho \varkappa^2 a A^2}{2 \omega} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$ [1].

Es ist zu beachten, dass bei gegebener Quelle die Amplitude umgekehrt proportional ω, und daher die Intensität umgekehrt proportional ω^2 ausfällt. Für einen spitzen Kegel ist die Intensität grösser, nicht allein wegen der Verringerung der Oeffnung, durch welche der Schall sich verbreitet, sondern auch, weil die von der Quelle ausgesandte totale Energie selbst gewachsen ist.

Befindet sich die Quelle in der freien Luft, so haben wir nur $\omega = 4\pi$ zu setzen, und wenn sie nahe einer starren Ebene liegt, $\omega = 2\pi$.

Die Resultate dieses Abschnittes finden eine interessante Anwendung in der Theorie des Sprachrohres oder (nach dem Reciprocitätsgesetz, §§. 109, 294) des Hörrohres. Ist der Durchmesser des weiten offenen Endes klein im Vergleich mit der Wellenlänge, so erleiden die Wellen bei ihrer Ankunft eine vielfache Reflexion und das schliessliche Resultat, welches in bedeutendem Maasse von der genauen relativen Länge der Röhre und der Welle abhängt, erfordert eine andere Art der Bestimmung. Durch hinreichende Verlängerung des Kegels kann aber diese Reflexion vermindert werden; sie nähert sich dem Verschwinden, wenn der Durchmesser des offenen Endes eine grosse Anzahl von Wellenlängen in sich schliesst. Frei von Reibung würde es durch Verringerung von ω möglich sein, von einer gegebenen Quelle jeden gewünschten Betrag

[1]) Cambridge Mathematical Tripos Examination, 1876.

an Energie zu erhalten und zu gleicher Zeit durch Verlängerung des Kegels die ungehinderte Uebertragung dieser Energie von der Röhre auf die umgebende Luft zu sichern.

Aus der Theorie der Beugung geht hervor, dass der Schall sich nach einer seitlichen Richtung nicht in einem irgendwie beträchtlichen Maasse verliert, wenn nicht der Durchmesser des weiten Endes eine halbe Wellenlänge übersteigt. Die gebräuchliche Erklärung der Wirkung eines gewöhnlichen Sprachrohres, wonach dieselbe von einer angenommenen Concentration von Strahlen in der axialen Richtung abhängt, ist daher unhaltbar.

281. Mittelst Euler's Gleichung:

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} = a^2 \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

können wir leicht eine Theorie für conische Pfeifen mit offenen Enden entwickeln, analog der von Bernoulli für parallele Pfeifen, wobei beide Theorien derselben Begrenzung in Bezug auf die Kleinheit des Durchmessers der Pfeifen im Vergleich mit der Wellenlänge des Schalles unterliegen. Nehmen wir an, dass die Schwingung stationär ist, so dass $r\varphi$ überall proportional $\cos \varkappa a t$ bleibt, so erhalten wir aus (1):

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} + \varkappa^2 . r\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

deren allgemeine Lösung lautet:

$$r\varphi = A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die an dem offenen Ende zu erfüllende Bedingung, dass dort nämlich weder Verdichtung noch Verdünnung herrscht, giebt $r\varphi = 0$, so dass wir, wenn die beiden äussersten Radien der Pfeife r_1 und r_2 sind, haben:

$$A \cos \varkappa r_1 + B \sin \varkappa r_1 = 0, \quad A \cos \varkappa r_2 + B \sin \varkappa r_2 = 0.$$

Hieraus folgt durch Elimination von $A : B$, $\sin \varkappa (r_2 - r_1) = 0$, oder $r_2 - r_1 = \frac{1}{2} m \lambda$, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Thatsächlich ist, weil die Form der allgemeinen Lösung (3) und die Bedingung für ein offenes Ende dieselben sind wie für eine

parallele Pfeife, das Resultat, dass die Länge der Pfeife ein Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt, nothwendiger Weise auch hier dasselbe.

Ein bis zur Spitze reichender Kegel kann so behandelt werden, als wenn die Spitze ein offenes Ende wäre, weil dort, wie wir in §. 279 sahen, die Bedingung $r\varphi = 0$ erfüllt wird.

Die Aehnlichkeit mit dem Falle von parallelen Pfeifen erstreckt sich nicht auf die Lage der Knotenpunkte. Bei der tiefsten Schwingung einer an beiden Enden offenen parallelen Pfeife hat der Knotenpunkt eine centrale Lage; die zwei Hälften schwingen synchron wie Pfeifen, die an dem einen Ende offen, an dem anderen geschlossen sind. Wenn aber eine conische Pfeife durch eine Theilung in ihrem Mittelpunkte getrennt wäre, so würden die beiden Theile verschiedene Perioden haben; es liegt dieses auf der Hand, da der eine Theil von einer parallelen Pfeife sich dadurch unterscheidet, dass er an dem offenen Ende verengt ist — und hier bewirkt eine Verengung eine Erniedrigung des Tones; dagegen ist der andere Theil an dem geschlossenen Ende verengt, wo der Effect einer Verengerung in einer Erhöhung der Tonhöhe liegt. Damit die zwei Perioden dieselben sind, muss die Theilung näher an dem engeren Ende der Pfeife liegen. Ihre wirkliche Lage lässt sich analytisch aus (3) bestimmen, indem man den Werth von $\frac{d\varphi}{dr}$ gleich Null setzt.

Sind beide Enden einer conischen Pfeife geschlossen, so sind die entsprechenden Töne durch Elimination von $A : B$ aus den Gleichungen:

$$A\,(\cos \varkappa r_2 + \varkappa r_1 \sin \varkappa r_1) + B\,(\sin \varkappa r_1 - \varkappa r_1 \cos \varkappa r_1) = 0,$$
$$A\,(\cos \varkappa r_2 + \varkappa r_2 \sin \varkappa r_2) + B\,(\sin \varkappa r_2 - \varkappa r_2 \cos \varkappa r_2) = 0$$

zu bestimmen. Das Resultat dieser Elimination kann in folgende Form gebracht werden:

$$\varkappa r_2 - \operatorname{arc\,tang} \varkappa r_2 = \varkappa r_1 - \operatorname{arc\,tang} \varkappa r_1 \quad \ldots (4).$$

Ist $r_1 = 0$, so haben wir einfach:

$$\operatorname{tang} \varkappa r_2 = \varkappa r_2 \quad \ldots\ldots\ldots (5)[1];$$

[1]) Wegen der Wurzeln dieser Gleichungen siehe §. 207.

sind r_1 und r_2 sehr gross, so sind $arctg\, \varkappa r_1$ und $arc\ tg\ \varkappa r_2$ ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}\pi$, so dass $r_2 - r_1$ ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ ist, wie die Theorie der parallelen Röhren erfordert.

282. Sind zwei verschiedene Schallquellen von derselben Tonhöhe, gelegen in O_1 und O_2, vorhanden, so kann das Geschwindigkeitspotential φ in einem Punkte P, dessen Entfernungen von O_1, O_2 sind r_1 und r_2, ausgedrückt werden durch:

$$\varphi = A\,\frac{\cos \varkappa(at - r_1)}{r_1} + B\,\frac{\cos \varkappa(at - r_2 - \alpha)}{r_2} \ldots (1),$$

worin A und B Coefficienten sind, welche die Grösse der Quellen darstellen (von denen man ohne Verletzung der Allgemeinheit annehmen kann, dass sie dasselbe Zeichen haben); α stellt die Verzögerung (als eine Entfernung betrachtet) der zweiten Quelle gegenüber der ersten vor. Die zwei Wellenzüge verstärken sich in jedem Punkte P, wo $r_2 + \alpha - r_1 = \pm\, m\lambda$ ist, worin m eine ganze Zahl bedeutet, d. h. überall dort, wo P auf irgend einem Umdrehungshyperboloide aus dem Systeme derjenigen, die ihre Brennpunkte in O_1 und O_2 haben, liegt. In Punkten, welche auf den zwischenliegenden Hyperboloiden liegen, die durch $r_2 + \alpha - r_1 = \pm \frac{1}{2}(2m + 1)\lambda$ dargestellt werden, sind die beiden Sätze von Wellen in der Phase entgegengesetzt und neutralisiren sich gegenseitig, so weit als es ihre wirkliche Grösse zulässt. Die Neutralisation ist vollständig, wenn $r_1 : r_2 = A : B$; dann bleibt die Dichtigkeit in P permanent ungeändert. Die Schnittlinien dieser Kugel mit dem System von Hyperboloiden würden daher in den meisten Fällen verschiedene Kreise von vollkommener Ruhe bezeichnen. Ist der Abstand $O_1 O_2$ der beiden Quellen von einander gross im Vergleich zur Wellenlänge und sind die Quellen selbst an Kraft nicht sehr ungleich, so wird es möglich sein, von der Kugel $r_1 : r_2 = A : B$ auf eine Strecke von mehreren Wellenlängen sich zu entfernen, ohne dass man eine merkliche Störung in der Gleichheit der

Intensitäten antrifft, und daher auf endlichen Flächen mehrere Abwechslungen zwischen Schall und fast vollkommener Ruhe zu erhalten.

Bei dem wirklichen Versuche eine zufriedenstellende Interferenz zweier von einander unabhängiger Schalle herzustellen, begegnet man einigen Schwierigkeiten. Wenn das Unisono nicht ausserordentlich vollkommen ist, so tritt die Stille nur momentan ein und ist in Folge dessen schwer zu bestimmen. Daher ist es am besten, Schallquellen zu benutzen, welche mechanisch auf solch eine Weise mit einander verknüpft sind, dass die relativen Phasen der von ihnen ausgehenden Klänge sich nicht ändern können. Der einfachste Modus wäre, den ersten Klang durch Reflexion an einer ebenen Wand (§§. 269, 278) zu wiederholen; indessen ist der Versuch dann nicht ganz so direct wegen des fingirten Charakters der zweiten Quelle. Die zufriedenstellendste Form des Versuches ist vielleicht die von mir in dem Philosophical Magazine vom Juni 1877 beschriebene. „Ein intermittirender elektrischer Strom, welcher von einem in der Secunde 128 Schwingungen machenden Stimmgabelunterbrecher erhalten wird, erregt mittelst Elektromagnetismus zwei andere Gabeln, deren Schwingungszahl 256 war (§§. 63, 64). Diese beiden letzteren Gabeln waren in einer Entfernung von etwa zehn Yards aufgestellt und mit zweckmässig abgestimmten Resonatoren versehen, welche den Schall derselben verstärkten. Die Tonhöhe der Gabeln war nothwendiger Weise bei beiden identisch, weil die Schwingungen durch elektromagnetische Kräfte von gleicher Periode erzwungen wurden. War ein Ohr geschlossen, so stellte es sich als möglich heraus, die Orte der Stille mit beträchtlicher Genauigkeit zu bestimmen, indem eine Bewegung um etwa einen Zoll genügend war, um den Schall merklich wieder hervortreten zu lassen. In einem Punkte der Stille, bei welchem die Verbindungslinien desselben mit den Gabeln einen Winkel von ungefähr 60° umspannten, hatte das Ertönen einer der Gabeln, wenn die andere festgehalten wurde, eine sehr eigenthümliche Wirkung.“

Eine andere Methode ist die Verdoppelung eines längs

einer Röhre eilenden Schalles durch Seitenröhren, deren offene Enden als Schallquellen dienen. Der Versuch in dieser Form ist indessen nicht sehr leicht.

Oft kommt es vor, dass Symmetriebetrachtungen hinreichen, anzugeben, wo Orte der Stille vorhanden sind. Z. B. liegt es auf der Hand, dass weder in der Fortsetzung der Ebene einer schwingenden Platte, noch in der Aequatorebene eines symmetrischen Umdrehungskörpers, welcher in der Richtung der Axe schwingt, eine Aenderung der Dichtigkeit eintreten kann. Allgemeiner ist jede Ebene eine Ebene der Stille, in Bezug auf welche die Schallquellen in der Art symmetrisch liegen, dass in irgend einem Punkte und seinem Bilde in jener Ebene Schallquellen von gleicher Intensität aber entgegengesetzten Phasen vorhanden sind, oder, wie man oft zweckmässiger sagt, von gleicher Phase und entgegengesetzter Amplitude.

Ist irgend eine Anzahl von Schallquellen von derselben Phase, von deren Amplituden im Ganzen ebenso viele negative wie positive vorhanden sind, auf den Umfang eines Kreises vertheilt, so erregen diese keine Druckstörung in denjenigen Punkten, welche auf der geraden Linie liegen, die durch den Mittelpunkt des Kreises geht und senkrecht zu der Ebene des letzteren steht. Dieses ist der Fall der symmetrischen Glocke (§. 232), die keinen Schall in die Richtung ihrer Axe entsendet[1]).

Eine genaue experimentelle Untersuchung von Schwingungen in der Luft ist mit beträchtlichen Schwierigkeiten verknüpft, welche bis jetzt nur theilweise überwunden sind. Um unerwünschte Reflexionen zu vermeiden, muss man im Allgemeinen in der freien Luft arbeiten, in der sich ein feiner Apparat, wie etwa eine sensitive Flamme, schwer handhaben lässt. Ein anderes Hinderniss rührt von der Gegenwart des Experimentators selbst her, dessen Person gross genug ist, um den Zustand der Dinge, den er zu untersuchen wünscht, wesentlich zu stören. Unter den Apparaten, welche das Vorhandensein

---

[1]) Phil. Mag. (5) III, p. 460. 1877.

von Schallen angeben, mögen über Schachteln gespannte Membranen erwähnt werden, deren Erregung durch Sand oder durch kleine leicht gegen dieselben ruhenden Pendel sichtbar gemacht werden kann. Wird eine Membran einfach über einen Ring gespannt, so wirken auf beide Flächen derselben ziemlich dieselben Kräfte, und in Folge davon wird die Bewegung sehr verringert, wenn nicht die Membran gross genug ist, um einen merklichen Schatten zu werfen, durch welchen ihre hintere Fläche geschützt wird. Vielleicht ist aber die beste Methode, die Intensität des Schalles in irgend einem Punkte der Luft zu beobachten, die: einen Theil des Schalles durch eine Röhre, welche in einen kleinen Kegel oder Resonator endet, abzuleiten, worauf der so abgeleitete Schall zum Ohre oder einer manometrischen Kapsel geführt wird. Auf diese Weise lassen sich die Orte, wo Stille herrscht, ohne Schwierigkeit mit beträchtlicher Genauigkeit bestimmen.

Mittelst derselben Art von Apparaten ist es sogar möglich, die Phase der Schwingung an irgend einem Punkte der Luft zu untersuchen und die Flächen aufzusuchen, auf welchen die Phase sich nicht ändert[1]). Wird das Innere eines Resonators durch biegsame Röhren mit einer Manometerkapsel verbunden, welche eine kleine Gasflamme beeinflusst, so ist die Bewegung der Flamme auf eine unveränderliche Art (die von dem Apparate selbst abhängt) mit der Druckänderung am Munde des Resonators verknüpft; speciell ist das Intervall zwischen dem niedrigsten Stande der Flamme und dem kleinsten Druck in dem Resonator unabhängig von der absoluten Zeit, zu welcher diese beiden Erscheinungen eintreten. Bei dem Versuche von Meyer wurden zwei Flammen, dicht neben einander in einer Verticalen aufgestellt, benutzt und mittelst eines Drehspiegels untersucht. So lange, wie die mit ihnen verbundenen Resonatoren unverändert an ihrem Orte blieben, nahmen die Zacken der beiden Flammen eine feste relative Lage ein. Diese relative Lage wurde auch beibehalten, wenn man einen der Resonatoren so fortbewegte, dass er eine Fläche von unveränder-

[1]) Meyer, Phil. Mag. (4) XLIV, p. 321. 1872.

licher Phase beschrieb. Wegen weiterer Details muss der Leser auf die Originalarbeit verwiesen werden.

283. Stossen Schallwellen auf ein Hinderniss, so geht ein Theil der Bewegung als Echo zurück; unter Schutz des Hindernisses bildet sich eine Art von Schallschatten. Um aber Schatten nur in etwa in der Vollkommenheit wie in der Optik herzustellen, müssen die Dimensionen des zwischenliegenden Körpers beträchtliche sein. Der hier anwendbare Vergleichsmaassstab ist die Wellenlänge der Schwingung; es wird meist als extreme Bedingung gefordert, Strahlen bei dem Schalle herzustellen, ebenso wie es in der Optik nöthig ist, das Entstehen derselben zu vermeiden. Doch sind Schallschatten, welche durch Hügel oder Gebäude gebildet werden, oft hinlänglich vollkommen und müssen von einem Jeden bemerkt worden sein.

Zur näheren Untersuchung wollen wir zunächst den Fall nehmen von ebenen Wellen vom harmonischen Typus, die auf einen unbeweglichen ebenen Schirm stossen; der letztere habe eine unendlich geringe Dicke, in ihm sei eine Oeffnung von irgend einer Form vorhanden, die Ebene des Schirmes ($x = 0$) sei parallel zu der Stirn der Wellen. Das Geschwindigkeitspotential des ungestörten Wellenzuges kann genommen werden als:

$$\varphi = \cos(nt - \varkappa x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Ist der Werth von $\frac{d\varphi}{dx}$ an der Oeffnung bekannt, so erlauben uns Formeln (6) und (7) §. 278 den Werth von φ an jedem Punkte der anderen Seite zu berechnen. Man findet in der gewöhnlichen Diffractionstheorie, wie dieselbe in den Werken über Optik gegeben wird, angenommen, dass die Störung in der Ebene der Oeffnung dieselbe ist, als wenn der Schirm nicht vorhanden wäre. Diese Hypothese genügt, obgleich sie niemals genau richtig sein kann, wenn die Oeffnung sehr gross im Vergleich zu der Wellenlänge ist, wie es gewöhnlich in der Optik der Fall zu sein pflegt.

Für die ungestörte Welle haben wir:

$$\frac{d\varphi}{dx}(x=0) = \varkappa \sin nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

und daher erhalten wir auf der anderen Seite:

$$\varphi = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int\int \frac{\sin(nt - \varkappa r)}{r} dS \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei die Integration sich über die Fläche der Oeffnung erstreckt. Da $\varkappa = 2\pi : \lambda$, so sehen wir bei der Vergleichung mit (1), dass bei der Annahme der Zerlegung einer primären Welle in Elementarwellen nach dem Huyghens'schen Princip dS durch λr getheilt und die Phase um ein Viertel einer Periode beschleunigt werden muss.

Ist r gross im Vergleich zu den Dimensionen der Oeffnung, so wird die Bildung des Integrals am besten mittelst der Huyghens'schen Zonen untersucht. Um den Punkt O, für welchen φ berechnet werden soll, als Mittelpunkt beschreibe man eine Reihe von Kugeln mit Radien, welche um die constante Differenz $\frac{1}{2}\lambda$ wachsen; die erste Kugel dieser Reihe habe einen solchen Radius (c), dass sie die Ebene des Schirmes gerade berühre. Auf dieser Ebene werden also eine Reihe von Kreisen ausgeschnitten, deren Radien ϱ gegeben sind durch $\varrho^2 + c^2 = (c + \frac{1}{2}n\lambda)^2$ oder $\varrho^2 = nc\lambda$ sehr nahe zu. Die Ringe, in welche durch diese Kreise die Ebene getheilt wird, geben daher, da sie angenähert gleichen Flächeninhalt haben, zu φ Beiträge, welche annähernd ihrer numerischen Grösse nach gleich sind und abwechselnd entgegengesetztes Zeichen haben. Liegt O entschieden in der Projection der Fläche, so ist das erste Glied der das Integral darstellenden Reihe endlich; die folgenden Glieder haben abwechselnd entgegengesetztes Zeichen und zunächst nahezu denselben constanten numerischen Werth. Später nehmen sie aber allmälig bis Null ab, in dem Maasse, in welchem die Theile der innerhalb der Oeffnung liegenden Ringe kleiner und kleiner werden. Der Fall einer Oeffnung, deren Begrenzung überall gleich weit von O liegt, ist ausgenommen.

In einer Reihe, wie die eben beschriebene, wird jedes Glied nach dem ersten meist genau durch die halbe Summe

der Glieder, welche ihm unmittelbar folgen und vorhergehen, neutralisirt, so dass die Summe der ganzen Reihe annähernd durch die Hälfte des ersten Gliedes dargestellt wird, welche uncompensirt übrig bleibt. Wir sehen, dass, vorausgesetzt, dass die Oeffnung eine hinreichende Anzahl von Zonen einschliesst, der Werth von φ in dem Punkte O unabhängig von der Natur der Oeffnung und daher derselbe ist, als wenn dort überhaupt kein Schirm vorhanden gewesen wäre. Wir können auch direct die Wirkung des Kreises berechnen, mit welchem das System der Zonen beginnt. Dieses Vorgehen hat den Vortheil, die Bedeutung der Phasenänderung, welche, wie wir fanden, nothwendiger Weise eingeführt werden muss, wenn die primäre Welle zerlegt wurde, klarer ans Licht zu stellen. Wir wollen uns dazu den fraglichen Kreis in unendlich kleine Ringe von gleichem Flächeninhalt getheilt denken. Die Theile von φ, welche von jedem dieser Ringe herrühren, sind daher an Amplitude gleich und haben Phasen, deren Werthe sich gleichmässig über die Hälfte einer vollständigen Periode erstrecken. Die Phase der Resultante liegt daher mitten zwischen denen der extremen Elemente, d. h., ist ein Viertel einer Periode hinter derjenigen zurück, welche von dem Elemente im Mittelpunkte des Kreises herrührt. Die Amplitude der Resultante ist in dem Verhältniss von

$$\int_0^\pi \sin x\,dx : \pi \text{ oder } 2 : \pi$$

kleiner, als wenn alle ihre Componenten dieselbe Phase gehabt hätten. Daher beträgt, weil die Fläche des Kreises $\pi\lambda c$ ist, die halbe Wirkung der ersten Zone:

$$\varphi = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\left(nt - \varkappa c - \frac{1}{2}\pi\right)}{\lambda c}\cdot\pi\lambda c = \cos(nt - \varkappa c),$$

dieselbe, als wenn die primäre Welle ungestört weiter gegangen wäre.

Liegt der Punkt O ziemlich weit von der Projection der Oeffnung entfernt, so ist das Resultat ein ganz anderes. Die

das Integral darstellende Reihe convergirt dann an beiden Enden; nach demselben Raisonnement wie vorher ergiebt sich, dass ihre Summe angenähert gleich Null ist. Wir schliessen hieraus, dass, wenn die Projection von O auf die Ebene $x = 0$ in die Oeffnung fällt, und um eine grosse Anzahl Wellenlängen näher an O liegt, wie der nächste Punkt der Begrenzung der Oeffnung, dass dann die Störung in O nahezu dieselbe ist, als wenn überhaupt kein Hinderniss vorhanden wäre. Wenn aber die Projection von O aus der Oeffnung herausfällt und um eine grosse Anzahl von Wellenlängen näher bei O liegt, wie der nächste Punkt der Begrenzung, dann verschwindet in Wirklichkeit die Störung in O. Das ist die Theorie der Schallstrahlen in ihrer einfachsten Form.

Wenn der Schirm zu der Ebene der Wellen geneigt ist, so gilt beinahe dieselbe Schlussweise wie vorher. Man kann sich, wie oben, die Bewegung auf der anderen Seite des Schirmes hervorgerufen denken durch die Normalbewegung der Theile in der Ebene der Oeffnung; diese Normalbewegung ändert aber jetzt ihre Phase von Punkt zu Punkt. Wenn die primären Wellen von einer Quelle Q ausgehen, so sind die Huyghens'schen Zonen für einen Punkt P die Reihen von Ellipsen, welche durch $r_1 + r_2 = PQ + \frac{1}{2} n\lambda$ dargestellt werden, wo r_1 und r_2 die Entfernungen irgend eines Punktes auf dem Schirme resp. von Q und P, und n eine ganze Zahl bedeuten. In Folge der angenommenen Kleinheit von λ im Vergleich mit r_1 und r_2 haben die Zonen zunächst gleichen Flächeninhalt und geben gleiche aber entgegengesetzte Beiträge zu dem Werthe von φ; daher schliessen wir auf dieselbe Weise wie vorher, dass in jedem Punkte, welcher entschieden ausserhalb der geometrischen Projection der Oeffnung liegt, die Störung verschwindet, während in jedem Punkte, entschieden innerhalb der geometrischen Projection, die Störung dieselbe ist, als wenn die primäre Welle den Schirm ungehindert passirt hätte. Es mag bemerkt werden, dass der Zuwachs in dem Flächeninhalte bei den Huyghens'schen Zonen, der von der Geneigtheit des Schirmes herrührt, bei der Berechnung

des Integrales durch die entsprechende Verringerung des Werthes der Normalgeschwindigkeit im Fluidum compensirt wird. Die Schwächung der primären Welle zwischen dem Schirme und dem Punkte P, welche von der Divergenz der Welle herrührt, wird dargestellt durch eine Verringerung des Flächeninhaltes der Huyghens'schen Zonen gegenüber dem Flächeninhalte, welcher ebenen einfallenden Wellen zukommt, in dem Verhältnisse von $r_1 + r_2 : r_1$.

Es besteht eine einfache Beziehung zwischen der Durchsendung des Schalles durch eine Oeffnung in einem Schirme und seiner Reflexion an einem ebenen Reflector von derselben Form wie die Oeffnung. Aus dieser Beziehung kann man manchmal beim Experimente Vortheil ziehen. Wir wollen uns eine Q ähnliche Schallquelle mit derselben Phase in Q', dem Bilde von Q in Bezug auf die Ebene des Schirmes, aufgestellt denken, und wollen dann annehmen, dass der Schirm weggenommen und durch eine Platte ersetzt wird, deren Form und Lage genau die der Oeffnung ist; dann wissen wir, dass die Wirkung der beiden Quellen auf P durch die Gegenwart der Platte gar nicht beeinflusst wird, so dass die Schwingung von Q', reflectirt an der Platte, und die Schwingung von Q, welche um die Platte herumgeht, zusammen dieselbe Wirkung thun, welche von Q erhalten würde, wenn überhaupt kein Hinderniss vorhanden wäre. Nun kann nach der Voraussetzung, welche wir im Anfange dieses Abschnittes machten, die ungehinderte Schwingung von Q so angesehen werden, als wäre sie zusammengesetzt aus der Schwingung, welche ihren Weg um die Platte herum findet und der, welche eine Oeffnung in einem unendlich dünnen Schirm von derselben Form passiren würde. Daher ist die von Q durch die Oeffnung hindurchgesandte Schwingung gleich der Schwingung von Q' aus, welche an der Platte reflectirt wird.

Um eine nahezu totale Reflexion zu erhalten, braucht die reflectirende Platte nur eine kleine Zahl der Huyghens'schen Zonen einzuschliessen. Bei der directen Reflexion wird der Radins ϱ der ersten Zone bestimmt durch die Gleichung:

$$\varrho^2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) = \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

worin c_1 und c_2 die Entfernungen des Reflectors von der Quelle und dem Beobachtungspunkte sind. Haben die betreffenden Entfernungen eine beträchtliche Grösse, so werden die Zonen so gross, dass gewöhnliche Wände nicht ausreichen, um eine totale Reflexion zu geben. Bei geringeren Entfernungen aber werden Echos oft nahezu in vollkommener Weise gehört. Die für eine vollständige Reflexion nothwendige Fläche hängt auch von der Wellenlänge ab. Daher kommt es manchmal vor, dass ein Brett oder eine Platte, welche durchaus nicht im Stande ist, einen tiefen musikalischen Klang zu reflectiren, sehr deutlich Zischen oder ein hohes Pfeifen reflectiren kann. Bei Versuchen über die Reflexion an Schirmen von mässiger Grösse besteht die Hauptschwierigkeit darin, sich in hinreichender Weise von der Wahrnehmung des directen Schalles loszumachen. Der einfachste Weg hierzu ist der, den Klang einer elektrischen Glocke oder einer andern recht stetigen Schallquelle um die Ecke eines grossen Gebäudes herum reflectiren zu lassen [1]).

284. Wir haben in dem vorstehenden Abschnitte das Huyghens'sche Princip auf den Fall angewandt, bei welchem angenommen wurde, dass die primäre Welle an einer imaginären Ebene zerlegt wird.

Kennen wir wirklich die Normalbewegung bei dieser Ebene, so können wir die Störung an jedem Punkte der anderen Seite durch eine strenge Rechnung finden. Für andere Flächen wie die Ebene ist das Problem allgemein noch nicht gelöst. Nichtsdestoweniger ist es nicht schwierig, einzusehen, dass, wenn die Krümmungsradien der Oberfläche sehr gross im Vergleich zur Wellenlänge sind, die Wirkung einer normalen Bewegung eines Elementes der Oberfläche sehr nahe dieselbe sein muss, als wenn die Fläche eben wäre. Dieses eingesehen, dürfen wir dasselbe Integral wie vorher zur Be-

---

[1]) Phil. Mag. (5) III, p. 458. 1877.

rechnung des Gesammtresultates verwenden. Der Zweckmässigkeit halber setzt man gewöhnlich am besten voraus, dass die Welle in einer Fläche zerlegt wird, welche in der Optik die **Wellenfläche** genannt wird, das ist eine Fläche, in welcher überall an jedem Punkte die **Phase** der Störung dieselbe ist.

Wir wollen die Anwendung des **Huyghens**'schen Principes auf die Berechnung des Vorschreitens einer gegebenen divergirenden Welle betrachten. Um irgend einen Punkt P, an welchem die dort befindliche Störung gesucht wird, als Mittelpunkt beschreibe man eine Reihe von Kugeln, deren Radien fortlaufend um die constante Differenz $\frac{1}{2}\lambda$ wachsen, wobei die erste Kugel dieser Reihe einen derartigen Radius (c) hat, dass sie die gegebene Wellenfläche in C berührt. Wenn nun R der Krümmungsradius der Fläche in irgend einer durch P und C gehenden Ebene ist, so wird der entsprechende Radius ϱ der äussern Begrenzung der $n$ten Zone gegeben durch die Gleichung:

$$R + c = \sqrt{R^2 - \varrho^2} + \sqrt{\left(c + \frac{1}{2}n\lambda\right)^2 - \varrho^2},$$

woraus wir annähernd erhalten:

$$\varrho^2 = n\lambda : \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Ist die Fläche eine Umdrehungsfläche um PC, so beträgt der Flächeninhalt der ersten n Zonen $\pi\varrho^2$; da ϱ^2 proportional n ist, so folgt dann, dass die Zonen gleiche Grösse haben. Ist die Fläche keine Umdrehungsfläche, so wird der Flächeninhalt der ersten n Zonen dargestellt durch $\frac{1}{2}\int \varrho^2 d\vartheta$, worin ϑ das Azimuth der Ebene ist, in der ϱ gemessen wird; es bleibt aber noch richtig, dass die Zonen gleichen Flächeninhalt haben. Da nach der Annahme die Normalbewegung über der Wellenfläche sich nicht sehr rasch ändert, so sind die von den einzelnen Zonen herrührenden Störungen in P nahezu gleich an Grösse und abwechselnd entgegengesetzt im Zeichen. Wir

schliessen daraus, dass, wie bei ebenen Wellen, die Gesammtwirkung die Hälfte von der beträgt, welche von der ersten Zone herrührt. Die Phase in P ist demgemäss hinter der auf der gegebenen Wellenfläche herrschenden um einen der Entfernung c entsprechenden Betrag verzögert.

Die Intensität der Störung in P hängt von dem Flächeninhalte der ersten Huyghens'schen Zone ab und weiter von der Entfernung c. In dem Falle der Symmetrie haben wir:

$$\frac{\pi \varrho^2}{c} = \frac{\pi \lambda R}{R + c},$$

welches zeigt, dass die Störung in dem Verhältnisse $R + c : R$ kleiner ist, als wenn R unendlich wäre. Diese Verringerung ist die Wirkung der Divergenz; sie ist dieselbe, welche aus der Voraussetzung erhalten würde, dass die Bewegung durch eine conische Röhre, deren Scheitel im Krümmungscentrum liegt, begrenzt wäre (§. 266). Ist die Fläche keine Umdrehungsfläche so kann der Werth von

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho^2 d\vartheta : c$$

ausgedrückt werden in Werthen der Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2, die mit R durch folgende Relation verbunden sind:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \vartheta}{R_1} + \frac{\sin^2 \vartheta}{R_2}.$$

Durch Ausführung der Integration erhalten wir:

$$\frac{1}{2c} \int_0^{2\pi} \varrho^2 d\vartheta = \frac{\pi \lambda \sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{(R_1 + c)(R_2 + c)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

so dass durch die Divergenz die Amplitude in dem Verhältnisse von $\sqrt{(R_1 + c)(R_2 + c)} : \sqrt{R_1 R_2}$ verkleinert wird. Dieses Resultat konnte vorhergesehen werden, wenn man sich die Bewegung auf eine Röhre abgegrenzt denkt, welche durch die Normalen gebildet wird, die auf einer kleinen in den Wellenflächen ausgeschnittenen geschlossenen Curve errichtet sind.

Obwohl wir bisher nur von divergirenden Wellen gesprochen haben, so lassen sich die vorhergehenden Ausdrücke doch

auch auf Wellen anwenden, welche in einer oder beiden Hauptebenen convergiren; nur müssen wir R_1 und R_2 zweckmässige Zeichen geben. In einem solchen Falle ist der Flächeninhalt der ersten Huyghens'schen Zone grösser, als wenn die Welle eben wäre; die Intensität des Schalles wird demgemäss entsprechend verstärkt. Fällt der Punkt P mit einem der Hauptkrümmungscentren zusammen, so wird der Ausdruck (2) unendlich. Die Untersuchung, auf welche (3) gegründet war, ist dann unzulänglich. Wir sind nur zu der Behauptung berechtigt, dass die Störung in P viel grösser als in anderen Punkten derselben Normale ist, dass diese Ungleichheit mit der Schwingungszahl wächst, und dass sie unendlich gross werden würde für Klänge von unendlich hoher Tonhöhe, deren Wellenlänge in Vergleich mit der in Frage stehenden Entfernung zu vernachlässigen ist.

285. Das Huyghens'sche Princip kann auch dazu verwandt werden, die Reflexion des Schalles an gekrümmten Flächen zu untersuchen. Giebt die materielle Fläche des Reflectors so vollkommen den Drucken der Luft nach, dass in jedem Punkte die Normalbewegung dieselbe ist, welche sie bei Nichtvorhandensein des Reflectors sein würde, so gehen die Schallwellen ungestört weiter. Man kann daher die Reflexion, welche wirklich eintritt, wenn die Oberfläche nicht nachgiebt, ansehen, als rührte dieselbe her von einer normalen Bewegung eines jeden Elementes des Reflectors, eine Bewegung, welche gleich und entgegengesetzt der der primären Welle in demselben Punkte ist. Die Reflexion lässt sich demnach mittelst der einer ebenen Fläche zukommenden Formel in der Art des vorhergehenden Abschnittes untersuchen, dessen Beschränkung in Bezug auf die relative Grösse der Wellenlänge und der anderen in Frage kommenden Entfernungen auch hier für die Formel gültig bleibt.

Der interessanteste Fall bei der Reflexion tritt ein, wenn die Oberfläche so gestaltet ist, dass sie eine Concentration der Strahlen auf einen einzelnen Punkt (P) bewirkt. Geht der Schall ursprünglich von einer einfachen in Q liegenden Quelle aus, und ist die Oberfläche ein Rotationsellipsoid mit den

Brennpunkten bei P und Q, so ist die Concentration eine vollständige, da die von den einzelnen Flächenelementen reflectirte Schwingung bei der Ankunft in Q alle dieselbe Phase haben. Ist Q unendlich weit entfernt, so dass die einfallenden Wellen eben sind, so wird die Oberfläche ein Paraboloid, welches seinen Brennpunkt in P hat; seine Axe ist parallel den einfallenden Strahlen. Wir dürfen indessen nicht annehmen, dass eine von Q aus divergirende symmetrische Welle durch die Reflexion an der ellipsoidischen Fläche in eine sphärische symmetrisch auf P convergirende Welle umgewandelt wird. Es ist im Gegentheil leicht einzusehen, dass die Intensität der convergirenden Welle in verschiedenen Richtungen verschieden sein muss. Nichtsdestoweniger werden die verschiedenen Theile der convergirenden Welle, wenn die Wellenlänge sehr klein im Vergleich zum Radius ist, annähernd von einander unabhängig; ihr Vorschreiten wird dann auch durch einen Fehler an einer vollkommenen Symmetrie nicht wesentlich beeinflusst.

Die Verstärkung des Schalles, welche von der Krümmung herrührt, hängt von dem Verhältnisse des Flächeninhaltes der reflectirenden Fläche, von welcher Störungen mit gleicher Phase ankommen, zu dem Inhalte der ersten Huyghens'schen Zone eines ebenen Reflectors an derselben Stelle ab. Sind die Abstände des Reflectors von der Schallquelle und dem Beobachtungspunkte beträchtlich und ist die Wellenlänge nicht sehr klein, so ist die erste Huyghens'sche Zone schon ziemlich gross; demnach wird dann bei einem mässig grossen Reflector wenig gewonnen, wenn man denselben concav macht. Andererseits sind concave Reflectoren bei Versuchen im Laboratorium, wenn mässig grosse Entfernungen benutzt werden und die angewandten Schallquellen einen hohen Ton geben, wie z. B. das Ticken einer Uhr oder das Knistern von elektrischen Funken, sehr wirksam und geben eine deutliche Concentration des Schalles auf einzelne Stellen.

286. Wir sahen, dass der Punkt R, in welchem ein Strahl, der von Q ausgehend nach Reflexion an einer ebenen oder gekrümmten Fläche durch P hindurchgeht, die reflectirende Fläche

trifft, durch die Bedingung bestimmt wird, dass $QR + RP$ ein Minimum (oder in einigen Fällen ein Maximum) ist. In dem Punkte R liegt dann der Mittelpunkt des Systems der Huyghens'schen Zonen; die Schwingungsamplitude in P hängt von der Grösse der ersten Zone ab und die Phase von der Entfernung $QR + RP$. Befindet sich auf der Fläche des Reflectors kein Punkt, für welchen $QR + RP$ ein Maximum oder ein Minimum ist, so hat das System der Huyghens'schen Zonen keinen Mittelpunkt; es ist dann kein Strahl vorhanden, der von Q ausgehend nach Reflexion an der Fläche in P ankommt. Auf gleiche Weise wird bei einer mehrfachen Reflexion der Verlauf des Strahles durch die Bedingung bestimmt, dass seine ganze Länge zwischen je zwei Punkten ein Maximum oder Minimum ist.

Dasselbe Princip kann darauf angewandt werden, die Brechung des Schalles in einem Medium aufzusuchen, dessen mechanische Eigenschaften sich von Punkt zu Punkt sehr allmälig ändern. Wir nehmen dabei an, dass die Aenderung so gering ist, dass keine merkbare Reflexion eintritt. Dies lässt sich mit einer entschiedenen Brechung der Strahlen wohl vereinigen, wenn letztere Strecken durchlaufen, welche eine sehr grosse Zahl von Wellenlängen einschliessen. Offenbar kommt es hier nicht allein auf die Länge des Strahles an, sondern auch auf die Geschwindigkeit, mit welcher die Welle längs desselben forteilt, insofern, als diese Geschwindigkeit nicht mehr constant bleibt. Die zu erfüllende Bedingung ist die, dass die Zeit, welche von einer Welle in Anspruch genommen wird, um längs eines Strahles von einem Punkte zu einem andern zu eilen, ein Maximum oder Minimum sein muss; so dass, wenn V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in irgend einem Punkte und ds ein Element der Länge des Strahles ist, die Bedingung folgendermassen ausgedrückt werden kann: $\delta \int V^{-1}\, dS = 0$. Das ist Fermat's Princip der kürzesten Zeit.

Die weitere Entwickelung dieses Theiles unseres Gegenstandes würde uns zu weit in das Bereich der geometrischen Optik führen. Da die fundamentale Annahme von der Kleinheit der Wellenlänge, auf welche die Doctrin der Strahlen auf-

gebaut ist, eine viel grössere Anwendbarkeit auf die Phänomene des Lichtes wie auf die des Schalles findet, so mag die Aufgabe, ihre Consequenzen zu entwickeln, angemessener Weise den Bearbeitern der Schwesterwissenschaft überlassen bleiben. In den folgenden Abschnitten werden die Methoden der Optik auf ein oder zwei vereinzelte Fragen angewandt, deren akustisches Interesse hinreichend gross ist, um ihre Betrachtung in diesem Buche zu erfordern.

287. Eine der auffallendsten Erscheinungen aus der Fortpflanzung des Schalles innerhalb geschlossener Gebäude ist die der „Seufzergallerien". Ein gutes und leicht zugängliches Beispiel hiervon findet sich in der kreisförmigen Gallerie an der Basis der Kuppel der St. Paul's Kathedrale. Die akustischen Autoritäten sind nicht ganz einig über die Erklärung, auf welche Weise diese Erscheinung erfolgt. Nach der Meinung von Airy[1]) ist die Wirkung einer Reflexion an der Oberfläche der über der Gallerie sich wölbenden Kuppel zuzuschreiben und wird an dem Punkte der Gallerie beobachtet, welcher der Schallquelle diametral gegenüberliegt. Jeder Strahl, der von einem Strahlen aussendenden (strahlenden) Punkte ausgeht und von der Oberfläche eines kugelförmigen Reflectors zurückgeworfen wird, schneidet nach der Reflexion denjenigen Durchmesser der Kugel, welcher den Strahlungspunkt enthält. Dieser Durchmesser ist in der That eine ausgeartete Form von einer der beiden kaustischen Flächen, die im Allgemeinen durch ein System von Strahlen berührt werden, da sie die Orte der Hauptkrümmungsmittelpunkte der Fläche sind, auf welcher die Strahlen senkrecht stehen. Die so bewirkte Concentration der Strahlen auf einen Durchmesser erfordert nicht, dass der strahlende Punkt in der Nähe der reflectirenden Fläche liegt.

Auf Grund einiger Beobachtuagen, welche ich in der Seufzergallerie von St. Paul gemacht habe, bin ich zu der Annahme geneigt, dass der Hauptheil der Erscheinung in etwas anderer Weise zu erklären ist. Die abnorme Stärke,

[1]) Airy, On Sound, 2nd edition, 1871, p. 145.

mit welcher ein Flüstern gehört wird, bleibt nicht auf die Stelle beschränkt, welche derjenigen gegenüberliegt, wo geflüstert wird. Daher rührt diese Stärke offenbar auch nicht wesentlich von der Symmetrie der Kuppel her. Das Flüstern scheint horizontal um die Gallerie herum zu kriechen und zwar nicht nothwendiger Weise längs des kürzern Bogens, sondern eher längs des Bogens, gegen welchen das Gesicht der flüsternden Person gewandt ist. Das ist eine Folge der sehr ungleichen Hörbarkeit eines Seufzers vor und hinter dem Sprecher, eine Erscheinung, welche in der offenen Luft leicht beobachtet werden kann [1]).

Wir wollen den Verlauf der Strahlen verfolgen, die von einem strahlenden Punkte P aus, welcher nahe der Fläche einer reflectirenden Kugel liegt, divergiren. Der Mittelpunkt der Kugel sei O, der durch P gehende Durchmesser AA', so dass A der P am nächsten liegende Punkt auf der Oberfläche ist. Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf einen Strahl, welcher von P unter einem Winkel $\pm \vartheta$ mit der Tangentenebene in A ausgeht, so sehen wir, dass dieser Strahl nach einer beliebigen Anzahl von Reflexionen dauernd eine concentrische Kugel mit dem Radius $OP \cos\vartheta$ berührt, so dass das ganze conische Strahlenbüschel, welches ursprünglich Winkel mit der in A gelegten Tangentenebene bildet, die numerisch kleiner wie ϑ sind, später immer zwischen der reflectirenden Fläche und der concentrischen Kugel vom Radius $O P \cos \vartheta$ eingeschlossen bleibt. Die gewöhnliche Divergenz nach drei Dimensionen, welche eine Verringerung der Stärke proportional r^{-2} bedingt, wird durch eine Divergenz nach nur zwei Dimensionen ersetzt, gleich der von Wellen, die von einer Quelle ausgehen, welche zwischen zwei reflectirenden Ebenen liegt. Bei dieser Divergenz nach zwei Dimensionen ändert sich die Intensität wie r^{-1}. Die viel weniger rasche Schwächung des Schalles mit der Entfernung, als wie dieselbe gewöhnlich beobachtet wird, ist der Hauptzug in der Erscheinung, welche die Seufzergallerien bieten.

Die Dicke der Schicht, welche zwischen den beiden Ku-

---

[1]) Phil. Mag. (5) III, p. 458. 1877.

geln eingeschlossen ist, wird kleiner und kleiner, in dem Maasse, wie A sich P nähert. In dem Grenzfalle, wo ein strahlender Punkt auf der Fläche des Reflectors liegt, wird diese Dicke durch $OA(1 - \cos\vartheta)$ oder, wenn ϑ klein ist, durch $\frac{1}{2} OA . \vartheta^2$ angenähert ausgedrückt. Die Oeffnung des Strahlenkegels, welcher den ganzen Betrag der Strahlung in der Schicht bestimmt, ist $4\pi\vartheta$, so dass, wenn ϑ ohne Grenzen kleiner wird, die Intensität im Vergleich mit der Intensität in einer endlichen Entfernung von einer gleichen Schallquelle in der offenen Luft unendlich gross wird.

Es ist klar, dass dies, so zu sagen, Herumwinden des Schalles um die Fläche einer Höhlung nicht von der Genauigkeit der kugelförmigen Gestalt abhängt. Bei einer genau richtigen Kugel aber, oder lieber bei einer mit Bezug auf AA' symmetrischen Fläche tritt noch die andere Art der Concentration hinzu, von der im Anfange dieses Abschnittes gesprochen wurde, und welche dem Punkte A', diametral der Schallquelle gegenüber, eigenthümlich ist. Wahrscheinlich rührt bei einer nahezu kugelförmigen Kuppel, wie die von St. Paul, ein Theil der beobachteten Wirkung von der Symmetrie her, wenn auch vielleicht der grössere Theil einfach der allgemeinen Concavität der Wände zuzuschreiben ist.

Die Fortpflanzung von Erdbebenstörungen wird wahrscheinlich durch die Krümmung der Erdoberfläche beeinflusst, indem dieselbe wie eine Seufzergallerie wirkt. Vielleicht entgehen selbst Schallschwingungen, die an der Oberfläche von Land oder Wasser erzeugt werden, nicht ganz demselben Einflusse.

Viele Punkte, die mit der Akustik von öffentlichen Gebäuden zusammenhängen, sind noch dunkel. Es ist von Wichtigkeit, stets daran zu denken, dass der Schallverlust bei einer einzelnen Reflexion an einer glatten Wand sehr klein bleibt, gleichgültig, ob die Wand eben oder gekrümmt ist. Zur Vermeidung des Wiederhallens kann es oft nöthig sein, Teppiche oder Decken anzubringen, um den Schall zu absorbiren. In manchen Fallen reicht die Gegenwart eines Auditoriums hin,

um die gewünschte Wirkung zu erzielen. Bei Abwesenheit jeglicher den Schall schwächenden Gegenstände kann die Verlängerung der Schalldauer sehr beträchtlich sein. Vielleicht ist das überraschendste Beispiel hierfür dasjenige, welches das Baptisterium in Pisa liefert. Dort hört man die Klänge eines gewöhnlichen gesungenen Accordes zusammen mehrere Secunden lang wiederhallen. Nach Henry[1]) ist es von Wichtigkeit, die wiederholte Reflexion des Schalles vor- und rückwärts längs der Längsausdehnung eines für öffentliche Reden bestimmten Raumes zu verhindern. Es kann dies durch zweckmässig angebrachte geneigte Flächen erreicht werden. Auf diese Weise wird die Zahl der Reflexionen in einer bestimmten Zeit vermehrt und der ungebührlich grossen Verlängerung des Schalles Einhalt gethan.

288. Der einzige Fall von akustischer Brechung, der ein praktisches Interesse bietet, ist diejenige Abweichung der Schallstrahlen von ihrem geradlinigen Wege, welche von der Heterogenität der Atmosphäre abhängt. Die Druckänderung in verschiedenen Höhen giebt für sich allein keine Veranlassung zur Brechung, da die Geschwindigkeit des Schalles unabhängig von der Dichte ist. Indessen liegt, wie zuerst Prof. Osborne Reynolds[2]) hervorhob, die Sache anders für die Aenderungen der Temperatur, welche gewöhnlich auftreten. Die Temperatur der Atmosphäre wird hauptsächlich durch die Verdichtung oder Verdünnung bestimmt, welche jeder Theil der Luft bei seinem Uebergange von der einen Höhe zur anderen erfährt. Beim Normalzustande befindet sich die Atmosphäre eher in einem „Fortführungsgleichgewicht“ [3]), als in einem Zustande von Gleichförmigkeit. Diesem Gesichtspunkte gemäss ist die Beziehung zwischen Druck und Dichte die in (9), §. 246 ausgedrückte; die Geschwindigkeit des Schalles wird gegeben durch:

[1]) Amer. Assoc. Proc. 1856, p. 119.

[2]) Proceedings of the Royal Society, Vol. XXII, p. 531. 1874.

[3]) Thomson, On the convective equilibrium of temperature in the atmosphere. Manchester Memoirs, 1861—62.

$$V^2 = \frac{dp}{d\varrho} = \gamma \frac{p_0}{\varrho_0} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma - 1} \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Um den Druck und die Dichte mit der Höhe (z) über dem Erdboden zu verbinden, haben wir die hydrostatische Gleichung:

$$dp = - g\varrho\, dz \quad \ldots \ldots \quad (2);$$

aus dieser finden wir in Verbindung mit (1):

$$V^2 = V_0^2 - (\gamma - 1)\, gz \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

wenn V_0 die Geschwindigkeit an der Oberfläche der Erde ist.

Die mittelst der Gleichung (10), §. 246 gefundene entsprechende Beziehung zwischen Temperatur und der Höhe (z) lautet:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 1 - \frac{\gamma - 1}{V_0^2}\, gz \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

worin θ_0 die Temperatur an der Erdoberfläche bedeutet.

Nach (4) würde das Sinken der Temperatur ungefähr 1° C. für 100,8 Meter betragen, was von den Resultaten der Ballonbeobachtungen von Glaisher nicht viel abweicht. Bei klarem Himmel erfolgt das Sinken der Temperatur am Tage rascher, als wenn der Himmel bewölkt ist; gegen Sonnenuntergang wird die Temperatur aber annähernd constant[1]). Wahrscheinlich ist es in klaren Nächten oben oft wärmer wie unten.

Die Erklärung der akustischen Brechung durch die Abhängigkeit von der Temperaturänderung mit der Höhe ist fast genau dieselbe wie die der optischen Erscheinung der Luftspiegelung. Die Krümmung (ϱ^{-1}) eines Strahles, dessen Verlauf annähernd horizontal ist, lässt sich leicht nach einer von Prof. James Thomson[2]) gegebenen Methode berechnen. Zwei Ebenen, welche in zwei aufeinanderfolgenden Punkten normal an den Strahl gezogen werden, schneiden sich im Krümmungsmittelpunkte und sind tangential zu der Wellenfläche in zwei aufeinanderfolgenden Bogen derselben. Die Theile der Strahlen resp. in den Höhen z und $z + \delta z$, welche zwischen

[1]) Nature, Sept. 20. 1877.

[2]) Siehe Everett, On the Optics of Mirage. Phil. Mag. (4) XLV, p. 161, 248.

den Normalebenen liegen, verhalten sich zu einander wie $\varrho : \varrho - \delta z$, und gleichfalls, da dieselben in derselben Zeit beschrieben sind, wie $V : V + \delta V$. Daher haben wir im Grenzfalle:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{d \log V}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Bei dem Normalzustande der Atmosphäre krümmt sich ein Strahl, der in horizontaler Richtung ausgeht, allmälig nach oben und geht in einer hinreichenden Entfernung über den Kopf eines Beobachters weg, dessen Stellung sich in derselben Höhe wie die Schallquelle befindet. Liegt die Schallquelle hoch, so wird der Schall an der Oberfläche der Erde durch einen Strahl gehört, der mit einer nach unten gerichteten Neigung ausgeht. Sind aber sowohl der Beobachter wie die Schallquelle auf der Oberfläche der Erde, so ist kein directer Strahl zwischen ihnen vorhanden; der Schall wird dann, wenn überhaupt, durch Beugung gehört. Man kann in diesem Falle sagen, dass der Beobachter sich in einem Schallschatten befindet, obwohl in der directen Linie zwischen ihm und der Schallquelle kein Hinderniss vorhanden ist.

Nach (3) haben wir:

$$2V\frac{dV}{dz} = -(\gamma - 1)g,$$

so dass:

$$\varrho = \frac{2V^2}{(\gamma - 1)g} = \frac{4}{\gamma - 1} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Der Krümmungsradius eines horizontal ausgehenden Strahles ist also das Zehnfache der Höhe, welche von einem Körper unter Wirkung der Schwere durchfallen werden muss, um eine Geschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit zu erlangen. Sind die Höhen des Beobachters und der Schallquelle über der Erde z_1 und z_2, so ist die grösste Entfernung, in welcher der Schall auf andere Weise wie durch Beugung gehört werden kann:

$$\sqrt{(2z_1\varrho)} + \sqrt{(2z_2\varrho)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Es ist nicht anzunehmen, dass sich die Atmosphäre immer in einem solchen Zustande befindet, dass die Beziehung zwi-

schen Geschwindigkeit und Höhe durch (3) ausgedrückt wird. Scheint die Sonne, so wird die Temperaturänderung nach oben viel rascher; andererseits ist, wie Prof. Reynolds bemerkt hat, beim Regen eine viel geringere Aenderung zu erwarten. In den arktischen Regionen, wo die Nächte lang und ruhig sind, kann Strahlung bei der Bestimmung des Temperaturgleichgewichtes mehr Einfluss haben als Fortführung; und wenn das der Fall ist, so wird die horizontale Verbreitung des Schalles in einer horizontalen Richtung begünstigt durch den annähernd isothermischen Zustand der Atmosphäre.

Die allgemeine Differentialgleichung für den Verlauf eines Strahles in dem Falle, wo die Flächen gleicher Geschwindigkeit parallele Ebenen sind, wird leicht aus dem Sinusgesetze erhalten. Ist ϑ der Einfallswinkel, so wird $V : \sin\vartheta$ durch eine brechende Fläche nicht geändert und bleibt deshalb in dem angenommenen Falle längs des ganzen Verlaufes des Strahles constant. Wenn die horizontale Coordinate x ist und der constante Werth von $V : \sin\vartheta$ mit c bezeichnet wird, so erhalten wir:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}},$$

oder:

$$x = \int \frac{V\,dz}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Für den Fall, dass das Geschwindigkeitsgesetz das in (3) ausgedrückte ist, folgt:

$$dz = -\frac{2\,V\,d\,V}{(\gamma - 1)\,g},$$

und daher:

$$x = -\frac{2}{(\gamma - 1) g} \int \frac{V^2 d\,V}{\sqrt{c^2 - V^2}},$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$(\gamma - 1)\,gx = const + V\sqrt{c^2 - V^2} - c^2 \sin^{-1}\frac{V}{c} \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

worin V nach (3) in Werthen von z ausgedrückt werden kann.

Ein einfacheres Resultat wird erhalten, wenn man eine angenäherte Form von (3) nimmt, die aber genau genug ist,

um den Fall, der praktisches Interesse bietet, darzustellen. Mit Vernachlässigung der Quadrate und höheren Potenzen von z dürfen wir setzen:

$$V^{-1} = V_0^{-1} + \frac{g(\gamma - 1)z}{2V^3} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Schreiben wir der Kürze halber β an Stelle von $\frac{g(\gamma-1)}{2V^3}$, so haben wir $\beta\,dz = d\,V^{-1}$. Durch Einsetzung in (8) ergiebt sich:

$$c\beta x = \int \frac{d\left(\frac{c}{V}\right)}{\sqrt{\frac{c^2}{V^2} - 1}} = lg\left[\frac{c}{V} + \sqrt{\frac{c^2}{V^2} - 1}\right] \quad \ldots \quad (11),$$

wobei der Anfangspunkt von x so genommen wird, dass er $V = c$ entspricht, das ist an der Stelle liegt, wo der Strahl horizontal ist. Drücken wir V in Werthen von x aus, so finden wir:

$$\frac{2c}{V} = e^{c\beta x} + e^{-c\beta x},$$

woraus:

$$\beta z = -V_0^{-1} + \frac{1}{2c}\left(e^{c\beta x} + e^{-c\beta x}\right) \quad \ldots \quad (12).$$

Der Verlauf jedes Strahles ist daher eine Kettenlinie, deren Scheitel unten liegt; der lineare Parameter ist $\frac{2V_0^3}{g(\gamma-1)c}$ und ändert sich von Strahl zu Strahl.

289. Eine weitere Ursache für die atmosphärische Brechung kann in der Wirkung des Windes liegen. Es ist seit Langem bekannt, dass die Schalle im Allgemeinen besser leewärts als nach der Windseite der Schallquelle gehört werden; diese Thatsache blieb aber unerklärt, bis Stokes[1]) darauf aufmerksam machte, dass die wachsende Geschwindigkeit des oberen Windstromes auf die geradlinige Fortpflanzung der Schallstrahlen Einfluss haben muss. Aus dem Fermat'schen

---

[1]) Brit. Ass. Rep. 1857, p. 22.

Princip der kürzesten Zeit folgt, dass der Verlauf eines Strahles in einem bewegten aber sonst homogenen Medium derselbe ist, als er in einem Medium sein würde, dessen sämmtliche Theile sich in Ruhe befinden, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in jedem Punkte um die in der Richtung des Strahles liegende Componente der Windgeschwindigkeit vermehrt wird. Ist der Wind horizontal und ändert er sich in derselben horizontalen Ebene nicht, so kann der Verlauf eines Strahles, dessen Richtung überall nur wenig gegen die des Windes geneigt ist, nach denselben Principien berechnet werden, welche in dem vorhergehenden Abschnitte auf den Fall von veränderlicher Temperatur angewandt wurden. Dabei muss aber die Normalgeschwindigkeit der Fortpflanzung in jedem Punkte durch die locale Windgeschwindigkeit vergrössert oder verkleinert werden, je nachdem die Bewegung des Schalles nach der Leeseite oder nach der Windseite gerichtet ist. Demnach wird, wenn der Wind nach oben hin zunimmt, wie dies als der normale Zustand angesehen werden kann, ein nach der Windseite gehender horizontaler Strahl allmälig aufwärts gebogen und geht in einer mässigen Entfernung über den Kopf eines Beobachters weg; Strahlen, welche mit dem Winde gehen, werden anderenseits nach unten gebogen, so dass ein Beobachter leewärts von der Schallquelle durch einen directen Strahl hört, der mit einer kleinen Neigung nach oben von der Schallquelle ausgeht und den Vortheil hat, auf dem grösseren Theile seines Weges ausser dem Bereiche der gewöhnlichen Hindernisse zu sein.

Das Gesetz der Brechung an einer horizontalen Fläche, bei deren Durchgang die Geschwindigkeit des Windes sich discontinuirlich ändert, ist leicht aufzufinden. Es wird ausreichen, den Fall zu betrachten, wo die Richtung des Windes und der Strahl in derselben verticalen Ebene liegen. Wenn ϑ der Einfallswinkel, zugleich also auch der Winkel zwischen der Wellenebene und der Trennungsfläche, ist, wenn U die Geschwindigkeit der Luft in der Richtung, welche den kleinern Winkel mit dem Strahle macht, bedeutet und ebenso V die gemeinsame Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so wird die Ge-

schwindigkeit der Spur der Wellenebene auf der Trennungsfläche:

$$\frac{V}{\sin\vartheta} + U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

welche Grösse bei der Brechung nicht geändert wird. Bezeichnet daher U' die Geschwindigkeit des Windes auf der zweiten Seite und ϑ' den Brechungswinkel, so haben wir:

$$\frac{V}{\sin\vartheta} + U = \frac{V}{\sin\vartheta'} + U' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

was von dem gewöhnlichen für die Optik geltenden Gesetze abweicht. Aendert sich die Geschwindigkeit des Windes continuirlich, so kann der Verlauf eines Strahles aus der Bedingung berechnet werden, dass der Ausdruck (1) constant bleibt.

Nehmen wir an, dass $U = 0$, so ist der grösste zulässige Werth von U':

$$U' = V(\operatorname{cosec}\vartheta - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

In einer Schicht, wo U' diesen Werth hat, wird die Richtung des Strahles, der unter einem Winkel ϑ ausgeht, parallel zu der brechenden Fläche; in eine Schicht, in der U' einen grösseren Werth hat, kann der Strahl überhaupt nicht eindringen. Daher wird ein in ruhender Luft nach oben unter einem Winkel von $\left(\frac{1}{2}\pi - \vartheta\right)$ zum Horizonte eilender Strahl an einem oberen Winde reflectirt, wenn dessen Geschwindigkeit grösser wie die in (3) gegebene ist, und zwar geschieht dies unabhängig von den Geschwindigkeiten der zwischenliegenden Schichten. Um ein numerisches Beispiel zu nehmen, werden alle Strahlen, deren Neigung nach oben kleiner wie 11° ist, durch einen Wind von demselben Azimuth, der sich mit der mässigen Geschwindigkeit von 24 km in der Stunde bewegt, total reflectirt. Die Einwirkung eines solchen Windes auf die Fortpflanzung des Schalles ist sicherlich von grosser Bedeutung. Ueber eine Oberfläche von ruhigem Wasser divergirt ein Schall, der sich leewärts bewegt, da er zwischen zwei parallelen reflectirenden Ebenen eingeschlossen ist, nur nach zwei Dimensionen und kann daher in viel grösseren Entfernungen gehört werden, wie es sonst möglich sein würde.

Eine andere mögliche Wirkung des über unserem Kopfe befindlichen Reflectors ist die: Schalle hörbar zu machen, welche in ruhiger Luft durch Hügel oder andere dazwischentretende Hindernisse aufgefangen würden. Zur Hervorrufung dieser Erscheinung ist es nicht nothwendig, dass bei der Schallquelle gar kein Wind vorhanden ist, sondern, wie sofort aus der Gestalt von (2) hervorgeht, nur, dass der Unterschied der Geschwindigkeiten $U - U'$ einen hinreichend grossen Werth erreicht.

Die Differentialgleichung für den Weg eines Strahles lautet, wenn sich die Windgeschwindigkeit U continuirlich ändert:

$$V\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = c \pm U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

woraus:

$$x = \int \frac{V\,dz}{\sqrt{(c \pm U)^2 - V^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Bei der Vergleichung von (5) mit der entsprechenden Gleichung (8) des vorhergehenden Paragraphen für gewöhnliche Brechung müssen wir daran denken, dass jetzt V constant ist. Wenn wir, um ein bestimmtes Resultat zu erhalten, annehmen, dass das Gesetz der Aenderungen des Windes in verschiedenen Höhen ausgedrückt wird durch:

$$U = \alpha + \beta z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

so haben wir:

$$\beta x = V \int \frac{dU}{\sqrt{(c \pm U)^2 - V^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7);$$

es hat diese Gleichung dieselbe Form wie (11) des vorhergehenden Paragraphen. Der Weg eines Strahles ist demgemäss auch in dem vorliegenden Falle eine Kettenlinie; aber es besteht doch ein sehr wichtiger Unterschied zwischen den beiden Problemen. Geschieht die Brechung auf dem gewöhnlichen Wege, wobei sie nur von einer veränderlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängt, so kann die Richtung eines Strahles umgekehrt werden. Bei der atmosphärischen Brechung, welche von einer Verringerung der Temperatur nach oben hin abhängt, ist der Verlauf eines Strahles eine Kettenlinie, deren Scheitel

unten liegt, in welcher Richtung der Strahl sich auch fortpflanzen mag. Rührt die Brechung von einem Winde her, dessen Geschwindigkeit nach oben zunimmt, und zwar nach dem in (6) aufgestellten Gesetze mit positivem β, so verläuft ein Strahl, der nach oben gerichtet ist, ebenfalls längs einer Kettenlinie mit nach unten gerichtetem Scheitel. Indessen kann ein Strahl, der nach unten gerichtet ist, nicht längs eines solchen Weges vorwärtseilen. In dem letzteren Falle liegt der Scheitel der Kettenlinie, längs welcher der Strahl sich bewegt, nach oben.

290. In der schon erwähnten Arbeit von Reynolds findet sich eine Beschreibung von einigen interessanten Versuchen, welche speciell dazu angestellt sind, die Theorie der Brechung des Schalles durch den Wind zu bestätigen. Es ergab sich, dass: „in der Richtung des Windes, wenn letzterer stark war, der Schall (einer elektrischen Glocke) sowohl mit dem Kopfe an der Erde wie mit erhobenem Kopfe gehört werden konnte, selbst wenn die Glocke sich in einer Vertiefung befand und dem Auge durch die Terrainerhebung entzogen war. Das Besteigen einer Höhe oder das Emporheben der Glocke brachte keinen Vortheil. Wenn der Wind über eine Grasfläche strich, konnte der Schall 125 Meter weit gehört werden, über Schnee 329 Meter, gleichgültig, ob der Kopf erhoben war oder sich am Boden befand. Dagegen wurde unter rechtem Winkel zu dem Winde die Hörbarkeit des Schalles in allen Fällen durch Erhebung des Beobachters oder der Glocke vergrössert."

„Es ergab sich, dass eine Erhebung in einer Richtung gegen den Wind die Hörbarkeit des Schalles in einer viel ausgeprägteren Weise beeinflusste als unter rechten Winkeln zum Winde."

„Ueber Gras konnte mit dem Kopfe in der Nähe des Bodens in einer Entfernung von 18 Metern von der Glocke kein Schall mehr gehört werden; war der Kopf 0,9 Meter von dem Boden entfernt, so ging der Schall in einer Entfernung von 27,4 Metern verloren; seine volle Intensität verlor sich bei aufrechter Stellung in 27,4 Meter Entfernung. In 64 Meter ging

der Schall, wenn der Beobachter aufrecht stand, in langen Zwischenräumen verloren und wurde auch sonst nur schwach gehört; er wurde aber wieder continuirlich gehört, wenn das Ohr sich 2,7 Meter über dem Boden befand, seine volle Stärke nahm er bei einer Erhebung von 3,6 Metern an."

Prof. Reynolds zieht folgendes Resultat aus seinen Versuchen:

1. „Wenn kein Wind weht, so ist der über eine rauhe Fläche gehende Schall oben intensiver wie unten."

2. „So lange die Geschwindigkeit des Windes oben grösser wie unten ist, erhebt sich der Schall auf der Windseite nach oben und wird nicht zerstört."

3. „Unter denselben Umständen wird der Schall auf der Leeseite nach unten gebogen, und daher vergrössert sich der Bereich seiner Hörbarkeit auf der Erdoberfläche."

Die atmosphärische Brechung hat einen wichtigen Einfluss auf die Hörbarkeit der Nebelsignale. Dieser Punkt hat innerhalb der letzten Jahre die Aufmerksamkeit zweier bedeutender Physiker, Prof. Henry in Amerika und Prof. Tyndall in England, auf sich gezogen. Henry[1]) schreibt beinahe alle Unregelmässigkeiten entfernter Schalle der Brechung zu und zeigte, wie es möglich ist, durch verschiedene Annahmen in Bezug auf die Luft über uns gewisse abnorme Erscheinungen zu erklären, die von ihm oder anderen Beobachtern bemerkt sind. Anderenseits nimmt Tyndall[2]), dessen Untersuchungen gleich ausgedehnt waren, an, dass die sehr kleinen Entfernungen, bis zu welchen der Schall manchmal nur hörbar ist, ihren Grund haben in einem wirklichen Aufhalten des Schalles durch einen ungleichförmigen Zustand der Atmosphäre, der von ungleicher Erwärmung oder Feuchtigkeit herrührt. Es ist nicht zu bezweifeln, dass die letztere Ursache im Stande ist, in dieser Richtung in einem gewissen Maasse einzuwirken. Tyndall bewies durch Versuche in seinem Arbeitsraume, dass der Schall

---

[1]) Report of the Lighthouse Board of the United States for the year 1874.

[2]) Phil. Trans. 1874. Sound 3te edition Ch. VII.

einer elektrischen Glocke durch abwechselnde Schichten von Gasen mit verschiedener Dichte in merklicher Weise aufgefangen wird. Wenn auch zugegeben werden muss, dass die Aenderungen der Dichtigkeit bei diesen Versuchen beträchtlicher und plötzlicher waren, als man sie in der offenen Luft mit Ausnahme vielleicht in der unmittelbaren Nachbarschaft des Erdbodens annehmen kann, so scheinen doch einige der Beobachtungen über die Nebelsignale selbst direct auf die eben erwähnte Erklärung hinzuweisen.

So wurde gefunden, dass der Schall einer auf dem Gipfel einer die See überschauenden Klippe aufgestellten Sirene von einem Echo mit allmälig abnehmender Intensität gefolgt wurde, dessen Dauer manchmal mehr wie 15 Secunden betrug. Diese Erscheinung wurde beobachtet, „wenn die See von der Glätte eines Spiegels war“. Sie kann offenbar von keiner anderen Ursache wie der von Tyndall ihr zugeschriebenen herrühren. Daher ist es wahrscheinlich, dass sowohl Brechung wie akustische Dunkelheit bei dem sonderbaren Verhalten der Nebelsignale zu beachten sind. A priori wird man sicher geneigt sein, den grösseren Einfluss der Brechung zuzuschreiben; Reynolds zeigte auch, dass einige von Tyndall's eigenen Beobachtungen eine Erklärung nach diesem Principe zulassen. Ein Mangel in der Reciprocität kann in Uebereinstimmung mit der Theorie nur durch die Wirkung des Windes erklärt werden (§. 111).

Nach der Hypothese von akustischen Wolken darf man einen Unterschied in dem Verhalten von Schallen von langer und kurzer Dauer erwarten, der hier wohl deshalb hervorzuheben ist, weil er von Niemandem früher bemerkt zu sein scheint. Da Energie bei der Reflexion und Brechung nicht verloren geht, so wird die Intensität der Strahlung in einer bestimmten Entfernung von einer continuirlichen Schallquelle (oder Lichtquelle) durch eine die Quelle einhüllende Wolke von sphärischer Form und gleichförmiger Dichte nicht beeinflusst, da der von den zwischen Quelle und Beobachtungspunkt liegenden Theilen der Wolke herrührende Verlust durch Reflexion an den jenseits der Quelle liegenden Theilen compensirt

wird. Hat indessen der Schall nur eine kurze Dauer, so kann die Intensität in einiger Entferung durch eine Wolke um sehr viel verringert werden, wegen der verschiedenen Abstände der reflectirenden Theile der letzteren und die daraus entspringende Verlängerung des Schalles. Dabei kann jedoch die ganze Intensität, wie dieselbe durch das Zeitintegral gemessen wird, dieselbe sein, als wenn überhaupt keine Wolke vorhanden wäre. Hierin liegt vielleicht die Erklärung für die Tyndall'sche Beobachtung, dass verschiedene Arten von Signalen nicht immer dieselbe Ordnung der Wirksamkeit behalten. Bei manchen Witterungsverhältnissen „war der Bereich der Hörbarkeit einer Haubitze, die eine dreipfündige Ladung abfeuerte, grösser als der von Pfeifen, Trompeten oder Sirenen“, während an anderen Tagen „die Unterlegenheit der Kanone unter der Sirene in der klarsten Weise nachgewiesen wurde“. Es ist indessen erwähnenswerth, dass bei derselben Reihe von Versuchen sich ergab, dass die Neigung des Schalles einer Kanone „durch einen entgegenstehenden Wind ausgelöscht oder abgelenkt zu werden sehr merklich wurde, und zwar in einer solchen Weise, dass es praktisch schon in einer geringen Entfernung ohne Nutzen war, diesen Schall nach der Windseite zu gebrauchen.“ Die eigentliche Brechung muss für alle Arten von Schallen dieselbe sein; es kann aber aus dem oben erwähnten Grunde die Beugung rund um die Kanten eines Hindernisses herum bei einer Kanone weniger wirksam werden wie bei der ausgehaltenen Note einer Sirene.

Ein anderer von Tyndall untersuchter Punkt war der Einfluss des Nebels auf die Fortpflanzung des Schalles. Ungeachtet vereinzelter Versicherungen des Gegentheils[1]) glaubte man allgemein auf die Autorität von Derham hin, dass dieser Einfluss des Nebels ein Vorurtheil sei. Tyndall's Beobachtungen beweisen zur Genüge, dass diese Meinung irrig ist, und dass die Verbreitung des Schalles durch eine homogene Zustandsbedingung der Atmosphäre, welche der

[1]) Siehe z. B. Desor, Fortschritte der Physik, XI, p. 217. 1855.

gewöhnliche Begleiter von nebligem Wetter zu sein pflegt, begünstigt wird. Ist die Luft mit Feuchtigkeit gesättigt, so geht das Sinken der Temperatur mit der Erhebung gemäss dem Gesetze des Fortführungsgleichgewichtes viel weniger rasch vor sich als wie bei trockener Luft, und zwar wegen der Verdichtung des Dampfes, welcher dann die Ausdehnung begleitet. Aus einer Berechnung Thomson's [1]) ergiebt sich, dass die Wirkung der Verdampfung und Verdichtung bei warmem Nebel der Art ist, dass dadurch das Sinken der Temperatur um die Hälfte vermindert wird. Die von der Temperatur herrührende akustische Brechung wird demnach verringert und auch in anderer Hinsicht ist der Zustand der Luft zweifellos der Art, dass die Fortpflanzung des Schalles begünstigt wird, vorausgesetzt, dass die suspendirten Theilchen selbst kein Hinderniss bereiten. In einem späteren Capitel werden wir die Störung von ebenen Schallwellen durch ein kleines Hinderniss untersuchen und werden finden, dass die Wirkung dieses Hindernisses von dem Verhältnisse des Durchmessers desselben zu der Wellenlänge des Schalles abhängt.

Derjenige Leser, welcher diese Untersuchungen weiter zu verfolgen wünscht, möge ausser den schon erwähnten Autoren noch eine Arbeit von Reynolds „On the Refraction of Sound by the Atmosphere" [2]) nachsehen. Es mag erwähnt werden, dass Reynolds mit Henry darin übereinstimmt, dass er Brechung als die wirklich vorwiegende Ursache der Störung ansieht. Weitere Beobachtungen sind aber noch sehr nöthig. Siehe gleichfalls §. 294.

291. Unter der Annahme, dass die Störung an einer Oeffnung in einem Schirme dieselbe ist, welche sie an derselben Stelle sein würde, wenn der Schirm nicht da wäre, können wir verschiedene, die Beugung des Schalles betreffende, Probleme nach denselben Methoden lösen, die für die entsprechenden Probleme in der Optik benutzt werden. Zum

---

[1]) Manchester Memoirs, 1861—62.

[2]) Phil. Trans. Vol. 166, p. 315. 1876.

11*

Beispiel lässt sich die in einiger Entfernung von dem Schirme stattfindende Störung auf der jenseitigen Seite einer unendlich grossen ebenen Wand mit kreisförmiger Oeffnung, auf welche ebene Schallwellen direct aufstossen, gerade so berechnen, wie in dem analogen Probleme des Beugungsbildes, das im Brennpunkte eines kreisförmigen Objectglases gebildet wird. Bei einem symmetrischen Sprachrohre hat so der Schall sein Maximum längs der Axe des Instrumentes, wo alle Elementarstörungen, welche von den verschiedenen Punkten der Ebene des Mundloches ausgehen, dieselbe Phase besitzen. In schrägen Richtungen ist die Intensität geringer, sie weicht aber nicht viel von dem Maximalwerthe ab, wenn nicht die schräge Richtung der Art ist, dass der Unterschied der Entfernungen von dem nächsten und entferntesten Punkte der Mundöffnung ungefähr eine halbe Wellenlänge beträgt. Bei einer noch etwas grösseren Neigung kann die Mundöffnung in zwei Theile getheilt werden, von denen der nähere einen Gesammteffect giebt, der an Grösse gleich, in der Phase aber entgegengesetzt ist, wie der Gesammteffect des weiteren Theiles. Es verschwindet dann also die Intensität in dieser Richtung. In noch mehr geneigten Richtungen kommt der Schall wieder, wächst auf eine Intensität gleich 0,017 von der in der Axe [1]), nimmt wieder bis Null ab und so fort; diese Intensitätsänderungen entsprechen den hellen und dunklen Ringen, welche den centralen Lichtkern des Bildes eines Sternes umgeben. Bezeichnet R den Radius der Mundöffnung, so ist der Winkel, an welchem zuerst Stille eintritt, $\arcsin\left(0{,}610\,\frac{\lambda}{R}\right)$. Geht der Durchmesser der Mundöffnung nicht über $\frac{1}{2}\,\lambda$ hinaus, so combiniren sich die Elementarstörungen ohne beträchtlichen Gegensatz in ihren Phasen, die Intensität ist nahezu nach allen Richtungen dieselbe. Offenbar erfordert eine Concentration des Schalles längs der Axe, dass das Verhältniss $R:\lambda$ gross ist, eine Bedin-

[1]) Verdet, Leçons d'optique physique, t. I, p. 306.

gung, welche meistens bei dem gewöhnlichen Gebrauche der Sprachrohre nicht erfüllt wird. Die Wirksamkeit derselben hängt eher von der Vermehrung des ursprünglichen Schallvolumens ab (§. 280). Haben indessen die Schwingungen eine sehr kurze Wellenlänge, so ist ein Sprachrohr von mässiger Grösse im Stande, eine beträchtliche Concentration längs der Axe zu bewirken. Ich habe das beim Zischen bestätigt gefunden.

292. Wenn auch solche Berechnungen, wie diejenigen sind, welche wir in dem vorhergehenden Abschnitte anstellten, dazu dienlich sein können, uns eine allgemeine Idee von den Erscheinungen der Diffraction zu geben, so muss man doch nicht vergessen, dass die Hülfsannahme, auf welche diese Rechnungen sich gründen, keineswegs genau und allgemein richtig ist. So ist bei einer Welle, welche direct auf einen Schirm fällt, die Normalgeschwindigkeit in der Ebene der Oeffnung nicht constant, wie wir voraussetzten, sondern wächst von dem Mittelpunkte nach der Kante hin, indem sie an der Kante selbst unendlich wird. Um die Bedingungen zu untersuchen, durch welche die wirkliche Geschwindigkeit bestimmt wird, wollen wir für den Augenblick annehmen, dass die Oeffnung ausgefüllt ist. Die einfallende Welle $\varphi = \cos(nt - \varkappa x)$ wird dann ganz reflectirt, das Geschwindigkeitspotential auf der negativen Seite des Schirmes lautet:

$$\varphi = \cos(nt - \varkappa x) + \cos(nt + x\varkappa) \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

dasselbe giebt, für $x = 0$, $\varphi = 2\cos nt$. Es entspricht dieser Werth dem Verschwinden der Normalgeschwindigkeit auf der Fläche der Oeffnung; die Vervollständigung des Problemes fordert von uns eine veränderliche Normalgeschwindigkeit in der Oeffnung in der Weise zu bestimmen, dass das von derselben herrührende Potential (§. 278) um die constante Grösse $2\cos nt$ wächst, wenn man von der negativen Seite zur positiven übergeht. Wir können uns auch, da dieser Uebergang einfach einen Zeichenwechsel in sich schliesst, so ausdrücken, dass wir zur gedachten Vervollständigung eine derartige Normal-

geschwindigkeit auf der Fläche der Oeffnung bestimmen, dass dieselbe auf der positiven Seite über derselben Fläche $\varphi = \cos nt$ macht. Das aus der Uebereinanderlagerung dieser beiden so definirten Bewegungen entspringende Resultat genügt allen Bedingungen des Problemes, da es dieselbe Geschwindigkeit und denselben Druck auf beiden Seiten der Oeffnung und eine verschwindende Normalgeschwindigkeit über den übrigen Theil des Schirmes liefert.

Bezeichnet $P \cos(nt + \varepsilon)$ den Werth von $\frac{d\varphi}{dx}$ an den verschiedenen Punkten der Oeffnung S, so lautet die zur Bestimmung von P und ε nöthige Bedingung nach (6) §. 278:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\int P\frac{\cos(nt - \varkappa r + \varepsilon)}{r}\,dS = \cos nt \ldots (2),$$

worin r den Abstand zwischen dem Elemente dS und den einzelnen Punkten der Oeffnung bedeutet. Sind P und ε bekannt, so wird der vollständige Werth von φ für jeden Punkt auf der positiven Seite des Schirmes gegeben durch:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\int P\frac{\cos(nt - \varkappa r + \varepsilon)}{r}\,dS \ldots (3),$$

und für jeden Punkt auf der negativen Seite durch:

$$\varphi = +\frac{1}{2\pi}\int\int P\frac{\cos(nt - \varkappa r + \varepsilon)}{r}\,dS + 2\cos nt \cos \varkappa x \ldots (4).$$

Die Ausdrücke für P und ε für eine endliche Oeffnung zu finden, ist, selbst bei kreisförmiger Form, mit den uns bis jetzt bekannten Methoden wahrscheinlich nicht möglich. In dem Falle indessen, wo die Dimensionen sehr klein im Vergleich mit der Wellenlänge sind, kann das Problem für den Kreis und die Ellipse gelöst werden. Bezeichnet r den Abstand zweier Punkte, welche beide in der Oeffnung liegen, so kann $\varkappa r$ vernachlässigt werden; wir erhalten dann aus (2):

$$\varepsilon = 0, \qquad 1 = -\frac{1}{2\pi}\int\int P\frac{dS}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5);$$

dies zeigt, dass $-\frac{P}{2\pi}$ die Dichtigkeit der Materie ist, welche

über S ausgebreitet werden muss, um dort das constante Potential Eins zu erzeugen. In einiger Entfernung von der Oeffnung auf der positiven Seite dürfen wir r als constant ansehen und setzen:

$$\varphi = M \frac{\cos(nt - \varkappa r)}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

worin $M = -\frac{1}{2\pi} \int\int P\, d\, S$ die ganze Menge von Materie ausdrückt, welche man sich über die Fläche vertheilt denken muss. An einem späteren Ort wird gezeigt werden, dass wir für eine Ellipse, deren halbe grosse Axe a und Excentricität e ist, haben:

$$M = a : F(e) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

wo F das Symbol der vollständigen elliptischen Function von der ersten Art bezeichnet. Für einen Kreis ist $F(e) = \frac{1}{2}\pi$, somit:

$$M = \frac{2a}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Dieses Resultat ist durchaus verschieden von demjenigen, welches wir auf Grund der Hypothese erhalten würden, dass die Normalgeschwindigkeit in der Oeffnung den der primären Welle eigenen Werth besitzt. In diesem Falle haben wir nach (3) §. 283:

$$\varphi = -\frac{\pi a^2}{\lambda} \frac{\sin(nt - \varkappa r)}{r} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Sind mehrere kleine Oeffnungen vorhanden, deren einzelne Entfernungen von einander viel grösser wie ihre Dimensionen sind, so giebt dieselbe Methode:

$$\varphi = M_1 \frac{\cos(nt - \varkappa r_1)}{r_1} + M_2 \frac{\cos(nt - \varkappa r_2)}{r_2} + \ldots (10).$$

Die Beugung des Schalles hat bis jetzt nur in geringem Maasse die Aufmerksamkeit der Mathematiker und Experimentatoren auf sich gezogen. Wenn auch der allgemeine Charakter dieser Erscheinung klar zu Tage liegt und daher

nicht sehr überraschende Entdeckungen zu erwarten sind, so würde doch die genaue theoretische Lösung einiger weniger von den einfacheren Problemen, welche sich bei der Beugung darbieten, von Interesse sein. Ebenso könnte selbst mit den gegenwärtigen unvollkommenen Methoden wahrscheinlich doch noch Einiges auf dem Wege der experimentellen Untersuchung geleistet werden.

293. Der Werth einer Function φ, die der Gleichung $\nabla^2\varphi = 0$ überall in dem Inneren eines einfach zusammenhängenden geschlossenen Raumes S genügt, lässt sich als das Potential einer über die Oberfläche von S ausgebreiteten Materie ausdrücken. In einem gewissen Sinne gilt dasselbe für die Classe von Functionen, mit denen wir jetzt zu thun haben, nämlich denjenigen, welche die Gleichung $\nabla^2\varphi + \varkappa^2\varphi = 0$ erfüllen. Im Folgenden wird der Helmholtz'sche Beweis [1]) hierfür gegeben. Nach dem Green'schen Satze haben wir, wenn φ und ψ zwei beliebige Functionen von x, y, z bedeuten:

$$\iint \varphi \frac{d\psi}{dn} dS - \iiint \varphi \nabla^2\psi \, dV$$

$$= \iint \psi \frac{d\varphi}{dn} dS - \iiint \psi \nabla^2\varphi \, dV.$$

Addiren wir auf jeder Seite $-\iiint \varkappa^2 \varphi \psi \, dV$, so haben wir für den Fall, dass:

$$a^2(\nabla^2\varphi + \varkappa^2\varphi) + \Phi = 0, \quad a^2(\nabla^2\psi + \varkappa^2\psi) + \Psi = 0:$$

$$a^2 \iint \varphi \frac{d\psi}{dn} dS + \iiint \varphi \Psi \, dV$$

$$= a^2 \iint \psi \frac{d\varphi}{dn} dS + \iiint \psi \Phi \, dV \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Verschwinden Φ und Ψ innerhalb S, so wird diese Gleichung einfach:

---

1) Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Crelle, Bd. LVII, p. 1. 1860.

$$\int\int \varphi \frac{d\psi}{dn} dS = \int\int \psi \frac{d\varphi}{dn} dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir wollen indessen annehmen, dass:

$$\varphi = \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin r den Abstand der einzelnen Punkte von einem festen Anfangspunkte O innerhalb S bedeutet. In allen Punkten, mit Ausnahme von O, verschwindet Φ; das letzte Glied in (1) wird:

$$\int\int\int \psi \Phi dV = -a^2 \int\int\int \psi \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dV = 4\pi a^2 \psi,$$

wobei sich ψ auf den Punkt O bezieht. Daher:

$$4\pi\psi = \int\int \frac{d\psi}{dn} \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} dS - \int\int \psi \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) dS$$
$$+ \frac{1}{a^2} \int\int\int \Psi \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wir haben hierin, wenn Ψ verschwindet, einen Ausdruck des Werthes von ψ für jeden inneren Punkt O in Werthen der Oberflächenwerthe von ψ und $\frac{d\psi}{dn}$. Bei dem gewöhnlichen Potentiale, auf welches wir zurückkommen, wenn wir $\varkappa = 0$ setzen, ist ψ durch die Oberflächenwerthe von $\frac{d\psi}{dn}$ allein bestimmt. Für ein endliches $\varkappa$ aber hört dieses Gesetz auf allgemein richtig zu sein. In einem gegebenen Raume S ist, wie in dem in §. 267 untersuchten Falle, eine Reihe von bestimmten Werthen von $\varkappa$ vorhanden, welche den Perioden der möglichen Arten von einfachen harmonischen Schwingungen entsprechen, die innerhalb einer starren geschlossenen Hülle von der Form S stattfinden können. Für jeden dieser Werthe von $\varkappa$ ist es klar, dass ψ nicht durch seine Normalvariation auf S und durch die Thatsache, dass es im ganzen Raume S der Gleichung $\nabla^2\psi + \varkappa^2\psi = 0$ genügt, bestimmt sein kann. Fällt aber der angenommene Werth von $\varkappa$ nicht mit einem aus dieser Reihe zusammen, so ist das Problem bestimmt;

denn der Unterschied zwischen zwei möglichen Lösungen würde, wenn er endlich wäre, die Bedingung erfüllen, dass er keine Normalgeschwindigkeit auf S giebt, eine Bedingung, welche nach Annahme mit dem angenommenen Werth von $\varkappa$ nicht erfüllt werden kann.

Sind die Dimensionen des Raumes S sehr klein im Vergleich zu λ ($= 2\pi : \varkappa$), so kann $e^{-i\varkappa r}$ durch Eins ersetzt werden; wir lernen dann, dass ψ nur um ein Weniges von einer Function abweicht, welche im ganzen Raume S der Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ genügt.

294. Bei der Ausdehnung des Green'schen Satzes (1) fand Helmholtz seinen Beweis für das in dem folgenden Satze enthaltene wichtige Theorem: Werden in einem mit Luft gefüllten Raume, der theilweise durch feste Körper von endlicher Ausdehnung begrenzt und theilweise unbegrenzt ist, Schallwellen in irgend einem Punkte A erzeugt, so ist das resultirende Geschwindigkeitspotential in einem zweiten Punkte B sowohl an Grösse, wie in der Phase dasselbe, als es in A sein würde, wenn B die Schallquelle gewesen wäre.

Wenden wir die Gleichung:

$$a^2 \int\int \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) dS = \int\int\int (\psi \Phi - \varphi \Psi)\, dV \ldots (1),$$

in welcher φ und ψ willkürliche Functionen bedeuten und weiter:

$$\Phi = -a^2(\nabla^2 \varphi + \varkappa^2 \varphi), \qquad \Psi = -a^2(\nabla^2 \psi + \varkappa^2 \psi)$$

ist, auf einen vollständig von einer starren Begrenzung umschlossenen Raum an, welcher irgend eine Anzahl von getrennten starren befestigten Körpern enthält, so haben wir, wenn φ, ψ die von den Quellen innerhalb S herrührenden Geschwindigkeitspotentiale sind:

$$\int\int\int (\psi \Phi - \varphi \Psi)\, dV = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Rührt somit φ von einer auf einen Punkt A concentrirten

Schallquelle her, so ist $\Phi = 0$, mit Ausnahme an diesem Punkte A, und weiter:

$$\iiint \psi \Phi \, dV = \psi_A \iiint \Phi \, dV,$$

worin $\iiint \Phi \, dV$ die Intensität der Quelle darstellt. Auf gleiche Weise haben wir, wenn ψ von einer in B gelegenen Schallquelle herrührt:

$$\iiint \varphi \Psi \, dV = \varphi_B \iiint \Psi \, dV.$$

Demgemäss folgt für den Fall, dass die Quellen endlich und gleich sind, so dass:

$$\iiint \Phi \, dV = \iiint \Psi \, dV \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

$$\psi_A = \varphi_B \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

welches der symbolische Ausdruck für das Helmholtz'sche Theorem ist.

Dehnt sich der Raum S unendlich weit aus, so verschwindet das Oberflächenintegral ebenfalls, das Resultat bleibt dasselbe. Wir brauchen hier aber nicht in weitere Details einzugehen, da dieses Theorem in dem bei weitem allgemeineren Reciprocitätsprincip des Capitel V eingeschlossen ist. Die dort gegebene Untersuchung zeigt, dass das Princip auch für die Anwesenheit von dissipativen Kräften richtig bleibt, vorausgesetzt, dass diese von Widerständen herrühren, welche der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional sind; dass weiter das Fluidum nicht homogen, noch die benachbarten Körper starr oder befestigt zu sein brauchen. Bei der Anwendung auf einen unendlich grossen Raum wird jede Unklarheit vermieden, wenn man annimmt, dass die Schwingungen langsam zerstreut werden, nachdem sie von den ins Auge gefassten Quellen A und B aus in einige Entfernung vorgedrungen sind.

Der Leser muss wohl darauf achten, dass in diesem Theoreme gleiche Schallquellen solche sind, welche durch die periodische Einführung oder Wegnahme von gleichen Mengen

Fluidum erzeugt werden oder durch irgend etwas anderes, dessen Wirkung dieselbe ist, und dass gleiche Quellen nicht nothwendiger Weise gleiche Beträge von Energie in gleichen Zeiten bedingen. Zum Beispiel sendet eine nahe an der Oberfläche eines grossen Hindernisses liegende Quelle das Doppelte an Energie aus, wie eine gleiche Quelle, welche im freien Raume liegt.

Als Beispiel für die Anwendbarkeit dieses Theoremes können wir den Fall eines Hör- oder Sprachrohres nehmen, das aus einer conischen Röhre besteht. Man sieht, dass die Wirksamkeit desselben die gleiche ist, ob nun ein in einem äusseren Punkte hervorgebrachter Schall an dem Scheitel des Kegels oder eine an dem Scheitel liegende Quelle von gleicher Stärke in dem äusseren Punkte beobachtet wird.

Gleichfalls ist es von Wichtigkeit daran zu denken, dass die Helmholtz'sche Form des Reciprocitätsgesetzes sich nur auf einfache Schallquellen anwenden lässt, welche in der Abwesenheit von Hindernissen symmetrische Wellen erzeugen. Wir werden in einem der späteren Capitel klarer sehen, dass es möglich ist, Schallquellen zu haben, welche dieser Bedingung nicht genügen, wenn dieselben auch auf einen unendlich kleinen Bereich beschränkt sind. Es wird hier genügen, den Fall von doppelten Quellen ins Auge zu fassen, für den das modificirte Reciprocitätsgesetz für sich Interesse darbietet.

Wir nehmen an, dass A eine einfache Quelle ist, welche in einem Punkte B das Potential $-\psi$ liefert, dass weiter A' eine gleiche und entgegengesetzte Quelle ist, die in einem benachbarten Punkte liegt und bei B das Potential $\psi + \Delta\psi$ giebt. Wirken beide Quellen gleichzeitig, so ist das Potential in B gleich $\Delta\psi$. Nun wollen wir annehmen, dass sich in B eine einfache Quelle befindet, deren Intensität und Phase dieselben wie die der Quellen in A und A' sind. Das von ihr kommende Potential in A ist ψ und das in A' gleich $\psi + \Delta\psi$. Bezeichnet man die Entfernung AA' mit h und lässt dieselbe ohne Grenze abnehmen, so wird die Geschwindigkeit des Fluidums bei A in der Richtung AA' die Grenze von $\Delta\psi : h$.

Wir wollen nun die Einheit einer Doppelquelle als die Grenze von zwei gleichen und entgegengesetzten Quellen bezeichnen, deren Abstand ohne Grenze verringert und deren Intensität ebenso ohne Grenze vergrössert wird, in solch einer Weise, dass das Product aus Intensität und Abstand dasselbe, wie für zwei einfache Quellen von der Grösse Eins und in der Entfernung Eins von einander ist. Dann können wir sagen, dass die in der Richtung AA' erfolgende Geschwindigkeit des Fluidums bei A, welche von einer einfachen Quelle Eins bei B herrührt, numerisch gleich dem Potentiale bei B ist, das von einer doppelten Quelle Eins bei A herrührt, deren Axe nach der Richtung von AA' geht. Dieser Satz ist, wie wohl bemerkt werden muss, richtig ohne Rücksicht auf alle Hindernisse oder Reflectoren, welche in der Nachbarschaft der Quellen vorhanden sein mögen.

Stellen andererseits AA' und BB' zwei doppelte Quellen Eins von derselben Phase vor, so ist die Geschwindigkeit bei B in der Richtung BB', welche von der Quelle AA' herrührt, dieselbe wie die Geschwindigkeit bei A in der Richtung AA', welche von der Quelle BB' stammt. Diese und andere Resultate gleicher Art können auch unmittelbar aus der Anwendung des allgemeinen Principes des §. 108 erhalten werden. Es werden die obigen Beispiele genügen, um zu zeigen, dass man bei der Anwendung des Principes der Reciprocität auf die Art der Quellen achten muss. Eine Doppelquelle, welche in einem offenen Raume liegt, ist in keinem Punkte ihrer Aequatorebene hörbar; es folgt hieraus indessen nicht, dass eine einfache Quelle in der Aequatorebene von dem Standpunkte der Doppelquelle aus nicht gehört werden kann. Aus diesem Principe lässt sich, wie ich glaube, ein merkwürdiger Versuch von Tyndall [1]) erklären, bei dem offenbar die Reciprocität versagte [2]). Die benutzte Schallquelle war eine

---

[1]) Proceedings of the Royal Institution, Jan. 1875. Ebenso Tyndall, On Sound, 3rd. edition, p. 405.

[2]) Siehe eine Note „On the Application of the Principle of Re-

Pfeife von sehr hohem Tone, welche in einer Röhre befestigt war, längs deren Axe die Intensität beträchtlich grösser, wie in schräger Richtung ausfiel.

295. Die kinetische Energie T der Bewegung innerhalb einer geschlossenen Fläche S wird ausgedrückt durch:

$$T = \frac{1}{2}\varrho_0 \int\int\int \Sigma \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

so dass:

$$\frac{dT}{dt} = \varrho_0 \int\int\int \Sigma \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\dot{\varphi}}{dx} dV$$

$$= \varrho_0 \int\int \dot{\varphi}\frac{d\varphi}{dn} dS - \varrho_0 \int\int\int \dot{\varphi} \nabla^2 \varphi \, dV \, .. (2),$$

nach dem Green'schen Satze. Für die potentielle Energie V_1 haben wir nach (12) §. 245:

$$V_1 = \frac{\varrho_0}{2a^2}\int\int\int \dot{\varphi}^2 dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

woraus:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\varrho_0}{a^2}\int\int\int \dot{\varphi}\ddot{\varphi} \, dV$$

$$= \frac{\varrho_0}{a^2}\int\int\int \left\{\frac{dR}{dt} + a^2 \nabla^2 \varphi\right\} \dot{\varphi} \, dV \, . \, . \, . \, (4),$$

nach der allgemeinen Bewegungsgleichung (9) §. 244. Bezeichnet E die ganze Energie innerhalb des Raumes S, so haben wir demnach:

$$\frac{dE}{dt} = \varrho_0 \int\int \dot{\varphi}\frac{d\varphi}{dn} dS + \frac{\varrho_0}{a^2}\int\int\int \frac{dR}{dt}\dot{\varphi} \, dV \ldots (5);$$

das erste Glied stellt die Arbeit dar, welche durch die Begrenzung S hindurch abgegeben und das zweite die Arbeit, welche von inneren Schallquellen geleistet wird.

Ist die Begrenzung S eine feste starre Hülle und sind keine inneren Quellen vorhanden, so behält E während der ganzen Bewegung seinen anfänglichen Werth. Dieses Prin-

ciprocity to Acoustics." Royal Society Proceedings, Vol. XXV, p. 118, 1876, oder Phil. Mag. (5) III, p. 300.

cip wurde von Kirchhoff[1]) darauf angewandt, die Bestimmbarkeit der Bewegung zu beweisen, welche aus willkürlichen Anfangsbedingungen folgt. Da jedes Element von E positiv ist, so kann innerhalb S keine Bewegung vorhanden sein, sobald E gleich Null. Wenn nun zwei Bewegungen möglich wären, welche denselben Anfangsbedingungen entsprechen, so würde ihre Differenz eine Bewegung sein, für welche der Anfangswerth von E Null wäre; eine solche Bewegung kann aber nach dem eben Gesagten nicht existiren.

---

[1]) Vorlesungen über Math. Physik, p. 311.

Capitel XV.

Weitere Anwendung der allgemeinen Gleichungen.

296. Wenn ein sonst ungehindert fortschreitender Wellenzug auf einen Raum stösst, welcher angefüllt ist mit einer Materie, deren mechanische Eigenschaften von denen des umgebenden Mediums abweichen, so bilden sich secundäre Wellen, welche man als eine von der Aenderung in der Natur des Mediums herrührende Störung ansehen kann. Dieser Gesichtspunkt wird specieller dann angebracht sein, wenn der Bereich der Störung sowohl, wie die Aenderung in den mechanischen Eigenschaften klein ist. Bestehen das Medium und das Hinderniss aus Fluidis, so giebt es der in Betracht kommenden mechanischen Eigenschaften zwei — die Compressibilität (Zusammendrückbarkeit) und die Dichte. Auf Reibung oder Viscosität wird hier keine Rücksicht genommen. In dem Capitel über Kugelfunctionen werden wir das hier erwähnte Problem unter der Voraussetzung betrachten, dass das Hinderniss kugelförmig ist, ohne irgend eine Einschränkung in Betreff der Grösse der Aenderung der mechanischen Eigenschaften; bei der jetzigen Untersuchung ist die Form des Hindernisses willkürlich, dafür nehmen wir aber an, dass die Quadrate und die höheren Potenzen der Aenderungen in den mechanischen Eigenschaften vernachlässigt werden dürfen.

Bezeichnen wir mit ξ, η, ζ die Verschiebungen des Theilchens, dessen Gleichgewichtslage durch x, y, z bestimmt wird, parallel zu den Coordinatenaxen, mit σ die normale Dichte

und mit m die Constante der Compressibilität, so dass $\delta p = m s$, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\sigma \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d(ms)}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

und zwei ähnliche Gleichungen in η und ζ. Unter der Annahme, dass die ganze Bewegung proportional $e^{i\varkappa a t}$ ist, worin wie gewöhnlich $\varkappa = 2\pi\lambda^{-1}$, und (§. 244) $a^2 = m\sigma^{-1}$, kann (1) geschrieben werden:

$$\frac{d(ms)}{dx} - \sigma \varkappa^2 a^2 \xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Beziehung zwischen der Verdichtung s und den Verschiebungen ξ, η, ζ, welche durch Integration von (3) §. 238 mit Bezug auf die Zeit erhalten wird, lautet:

$$-s = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Für das System von primären Wellen, welche in der Richtung $-x$ vorwärts eilen, verschwinden η und ζ; sind ξ_0, s_0 die Werthe von ξ und s und m_0, σ_0 die mechanischen Constanten für das ungestörte Medium, so haben wir wie in (2):

$$\frac{d(m_0 s_0)}{dx} - \sigma_0 \varkappa^2 a^2 \xi_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

aber ξ_0, s_0 genügen in dem Bereiche der Störung der Gleichung (2) nicht, wegen der Aenderung in m und σ, welche dort eintritt. Wir wollen annehmen, dass die vollständigen Werthe $\xi_0 + \xi$, η, ζ, $s_0 + s$ sind und diese in (2) einsetzen. Dann erhalten wir mit Rücksicht auf (4):

$$\frac{d(ms)}{dx} - \sigma \varkappa^2 a^2 \xi + (m - m_0) \frac{ds_0}{dx}$$
$$+ s_0 \frac{dm}{dx} - (\sigma - \sigma_0) \varkappa^2 a^2 \xi_0 = 0,$$

oder, wie wir auch schreiben können:

$$\frac{d(ms)}{dx} - \sigma \varkappa^2 a^2 \xi + \frac{d}{dx}(\triangle m . s_0) - \triangle \sigma . \varkappa^2 a^2 \xi_0 = 0 \ldots (5),$$

wenn Δm, $\Delta \sigma$ resp. für $m - m_0$, $\sigma - \sigma_0$ gesetzt ist. Die Gleichungen in η und ζ lauten auf gleiche Weise:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dy}(ms) - \sigma \varkappa^2 a^2 \eta + \frac{d}{dy}(\Delta m . s_0) = 0 \\ \frac{d}{dz}(ms) - \sigma \varkappa^2 a^2 \zeta + \frac{d}{dz}(\Delta m . s_0) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (6).$$

Es ist zu bemerken, dass Δm, $\Delta \sigma$ verschwinden mit Ausnahme in einem kleinen Raume, der als der Bereich der Störung angesehen wird. ξ, η, ζ, s müssen, da sie das Resultat der Störung sind, als kleine Grössen von der Ordnung Δm, $\Delta \sigma$ behandelt werden, so dass bei unserer nur angenäherten Rechnung die Variationen von m und σ in den ersten beiden Gliedern von (5) und (6) vernachlässigt werden müssen, da sie dort mit kleinen Grössen multiplicirt sind. Wir erhalten demnach aus (5) und (6) durch Differentiation und Addition, mit Benutzung von (3) als Differentialgleichung für s:

$$\nabla^2(ms) + \varkappa^2 ms = \varkappa^2 a^2 \frac{d}{dx}(\Delta \sigma . \xi_0) - \nabla^2(\Delta m . s_0) \ldots (7).$$

Wie in §. 277 lautet die Lösung von (7):

$$4\pi ms = \int\int\int \frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\left\{\nabla^2(\Delta m . s_0) - \varkappa^2 a^2 \frac{d}{dx}(\Delta \sigma . \xi_0)\right\} dV \quad . \; . \; . \; . \quad (8),$$

worin die Integration sich über ein Volumen erstreckt, das den Bereich der Störung vollständig einschliesst. Die Integrale in (8) lassen sich mit Hülfe des Green'schen Satzes umformen. Nennen wir die beiden Theile resp. P und Q, so haben wir:

$$P = \int\int\int \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \nabla^2(\nabla m . s_0)\, dV$$

$$= \int\int\int \Delta m . s_0 \nabla^2\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) dV$$

$$+ \int\int\left\{\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\frac{d}{dn}(\Delta m . s_0) - \Delta m . s_0 \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right)\right\} dS.$$

S bedeutet die Oberfläche des Raumes, über welchen sich die dreifache Integration erstreckt. Nun sind S sowohl als $\triangle m$ wie $\frac{d}{dn}(\triangle m . s_0)$ gleich Null, so dass die beiden Oberflächenintegrale verschwinden. Ueberdies ist:

$$\nabla^2\left(\frac{e^{-ixr}}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}e^{-ixr} = -x^2\frac{e^{-ixr}}{r};$$

und daher:

$$P = -x^2\int\int\int\frac{e^{-ixr}}{r}\triangle m . s_0\, dV \quad . \; . \; . \quad (9).$$

Ist der Bereich der Störung klein im Vergleich zu λ, so können wir schreiben:

$$P = -x^2 s_0\frac{e^{-ixr}}{r}\int\int\int\triangle m\, dV \quad . \; . \; . \quad (10).$$

Auf gleiche Weise finden wir für das zweite Integral in (8):

$$Q = -x^2a^2\int\int\int\frac{e^{-ixr}}{r}\frac{d}{dx}(\triangle\sigma . \xi_0)\, dV$$

$$= x^2a^2\int\int\int\triangle\sigma . \xi_0\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-ixr}}{r}\right)dV$$

$$= ix^3a^2\xi_0\mu\frac{e^{-ixr}}{r}\int\int\int\triangle\sigma\, dV \quad . \; . \; . \quad (11),$$

worin μ den Cosinus des Winkels zwischen x und r bedeutet. Die lineare Ausdehnung des Bereiches der Störung wird im Vergleich mit λ vernachlässigt und ebenso λ im Vergleich zu r.

Bezeichnet T das Volumen des Raumes, innerhalb dessen $\triangle m$ und $\triangle\sigma$ eine merkliche Grösse haben, so können wir schreiben:

$$\int\int\int\triangle m\, dV = T . \triangle m, \quad \int\int\int\triangle\sigma\, dV = T . \triangle\sigma,$$

wenn die Grössen $\triangle m$ und $\triangle\sigma$ auf der rechten Seite die Mittelwerthe der fraglichen Aenderungen darstellen. Daher folgt aus (8):

$$s = -\frac{x^2Te^{-ixr}}{4\pi mr}\left\{\triangle m . s_0 - ixa^2\triangle\sigma . \xi_0\mu\right\} \; . . . (12).$$

Um ξ_0 in Werthen von s_0 auszudrücken, haben wir aus (3): $\xi_0 = -\int s_0\, dx$; demnach, wenn die Verdichtung für die primäre Welle $s_0 = e^{i\varkappa(at+x)}$ ist, $i\varkappa\xi_0 = -s_0$; (12) lässt sich dann in folgende Form bringen:

$$s : s_0 = -\frac{\pi T e^{-i\varkappa r}}{\lambda^2 r}\left\{\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta\sigma}{\sigma}\mu\right\} \quad . \; . \; . \; (13),$$

worin s_0 die Verdichtung der primären Wellen an der Stelle der Störung zur Zeit t bedeutet, und weiter s die Verdichtung der secundären Wellen zu derselben Zeit in einer Entfernung r von der Störung. Da der durch den Factor $e^{-i\varkappa r}$ dargestellte Phasenunterschied einfach der Entfernung r entspricht, so können wir die Sachlage so auffassen, als ob in der Ebene der Störung eine einfache Umkehr der Phase eintritt. Die Amplitude der secundären Welle ist der Entfernung r und dem Quadrate der Wellenlänge λ umgekehrt proportional. Von den in (13) auftretenden zwei Gliedern ist das erste nach allen Richtungen rund um den Ort der Störung herum symmetrisch, während das zweite sich wie der Cosinus des Winkels zwischen den primären und secundären Strahlen ändert. Daher verhält sich ein Ort, wo m veränderlich ist, wie eine einfache Quelle, und ein Ort, wo sich σ ändert, wie eine Doppel-Quelle (§. 294).

Dass die secundäre Störung proportional mit λ^{-2} sein muss, kann unmittelbar durch die Methode der Dimensionen bewiesen werden. Wenn Δm und $\Delta\sigma$ gegeben sind, so ist die Amplitude nothwendigerweise proportional T und muss in Uebereinstimmung mit dem Principe der Energie gleichfalls umgekehrt proportional r sein. Nun kann das Verhältniss der Amplituden (in Bezug auf Raum, Zeit und Masse) nur eine Function von den Grössen T, r, λ, a (Geschwindigkeit des Schalles) und σ sein, von denen aber die letztere in dem Ausdruck für ein einfaches Verhältniss nicht vorkommen darf, da sie die einzige von den fünf ist, welche die Masse enthält. Von den übrigen vier Grössen T, r, λ und a ist die letztere die einzige, welche eine Beziehung zur Zeit hat und muss daher auch ausgeschlossen werden. Es bleiben

also nur noch T, r und λ; die einzige Combination zwischen diesen, welche proportional Tr^{-1} und unabhängig von der Längeneinheit ist, lautet $Tr^{-1}\lambda^{-2}$ [1]).

Eine interessante Anwendung der Resultate dieses Abschnittes lässt sich auf die Erklärung dessen machen, was harmonische Echos genannt worden ist [2]). Wenn der primäre Schall aus einem zusammengesetzten musikalischen Klange besteht, so werden die verschiedenen Toncomponenten in ungleichen Verhältnissen zerstreut. Die Octave ist z. B. im Verhältnisse zu dem Fundamentalton bei dem secundären Schall sechszehnmal stärker wie bei dem primären. Deshalb hat es keine Schwierigkeit zu verstehen, wie es kommt, dass Echos, welche von derartigen reflectirenden Körpern, wie Baumgruppen, zurückkommen, um eine Octave erhöht sein können. Diese Erscheinung hat auch noch eine complementäre Seite. Wenn eine Anzahl von kleinen Körpern in dem Wege von Schallwellen liegt, so entstehen die Schwingungen, welche von jenen ausgehen, auf Kosten der Energie des Hauptstromes; wo der Schall zusammengesetzt ist, schliesst die Verstärkung der höheren harmonischen Töne bei den zerstreuten Wellen in sich ein proportionales Schwächerwerden jener in der directen Welle, nachdem diese das Hinderniss passirt hat. Hierin liegt vielleicht die Erklärung für gewisse Echos, welche, wie man sagt, einen tieferen Schall zurückbringen wie der ursprüngliche war; es ist nämlich bekannt, dass man leicht die Höhe eines reinen Tones zu tief schätzt. Der Beweis ist aber anzufechten; der ganze Punkt erfordert weitere sorgfältige experimentelle Untersuchung. Er mag der Aufmerksamkeit derjenigen empfohlen werden, welche günstige Gelegenheit zur Beobachtung haben. Während eine Aenderung in dem Charakter eines Schalles leicht einzusehen und in der That bis zu einer gewissen Grenze allgemein eintreten muss, würde eine Aenderung in der Tonhöhe eines

---

1) „On the light from the sky," Phil. Mag. Feb. 1871, and „On the scattering of light by small Particles," Phil. Mag. June 1871.

2) Nature, 1873, VIII. 319.

einfachen Tones eine Verletzung des Gesetzes von erzwungenen Schwingungen in sich schliessen und schwerlich mit den theoretischen Vorstellungen zu vereinigen sein.

Bei der Ableitung von (13) haben wir die Einwirkung der veränderlichen Natur des Mediums auf die Störung vernachlässigt. Ist die Störung unter dieser Annahme vollständig bekannt, so können wir auf die frühere Art wieder eine weitere Annäherung erhalten. Die so erhaltenen hinzuzufügenden Glieder sind nothwendiger Weise von der zweiten Ordnung in Bezug auf Δm, $\Delta \sigma$, so dass unsere Ausdrücke in allen Fällen bis auf die ersten Potenzen dieser Grössen genau sind.

Selbst wenn der Bereich der Störung im Vergleiche zu λ nicht klein ist, bleibt doch dieselbe Methode anwendbar, vorausgesetzt, dass die Quadrate von Δm, $\Delta \sigma$ wirklich vernachlässigt werden dürfen. Die totale Wirkung irgend eines Hindernisses kann dann durch Integration aus den Wirkungen seiner Theile erhalten werden. Auf diese Weise lässt sich der Uebergang skizziren von einem kleinen Störungsbereich, dessen Oberfläche nicht in Betracht kommt, zu einer dünnen Platte deren Flächeninhalt gleich wenigen oder auch gleich sehr vielen Quadraten der Wellenlänge ist. Dieselbe wird schliesslich nach dem gewöhnlichen Gesetze der Optik reflectiren. Haben wir mit einem überall in der Richtung der primären Strahlen ausgedehnten Hindernisse zu thun, so hört diese Rechnungsmethode bald auf, praktisch zulässig zu sein, weil, wenn auch die Aenderung der mechanischen Eigenschaften sehr klein ist, doch die gegenseitige Einwirkung der verschiedenen einzelnen Theile des Hindernisses nicht ausser Rechnung gelassen werden kann. Diese Einschränkung muss man specieller bei der Untersuchung der Lichterscheinungen machen, da hier die Wellenlängen so ausserordentlich klein im Vergleich zu den Dimensionen der gewöhnlichen Hindernisse sind.

297. Die Einwirkung, welche erfolgt, wenn das Quadrat der Bewegung irgendwo zu solcher Grösse wächst, dass es nicht

länger vernachlässigt werden darf, ist einigermaassen der Wirkung ähnlich, die durch eine Aenderung in den mechanischen Eigenschaften eines kleinen Bereiches des Fluidums hervorgerufen wird. $\nabla^2\varphi + \varkappa^2\varphi$ nimmt dann einen endlichen Werth an, welcher von dem Quadrate der Bewegung abhängt. Solche Stellen gleichen demnach Schallquellen, deren Perioden die Submultiplen der ursprünglichen Periode umfassen. Daher wird jeder Theil des Raumes, wo sich die Intensität bis zu einer genügenden Stärke anhäuft, selbst eine secundäre Quelle, welche die harmonischen Töne des primären Schalles aussendet. Sind zwei primäre Schalle von hinreichender Stärke vorhanden, so haben die secundären Schwingungen Schwingungszahlen, welche die Summen und Differenzen der Schwingungszahlen der primären sind (§. 68)[1]).

298. Die Höhe eines Schalles wird modificirt, wenn sich die Quelle und der Empfänger in relativer Bewegung zu einander befinden. Es ist z. B. klar, dass ein sich einer festen Quelle nähernder Beobachter die Wellen mit einer Schwingungszahl treffen wird, welche die dem Schall eigenthümliche um die Anzahl der Wellenlängen übersteigt, die der Beobachter in einer Secunde passirt. Bezeichnen wir mit v die Geschwindigkeit des Beobachters, mit a die des Schalles, so wird demnach die Schwingungszahl in dem Verhältnisse $a \pm v : a$ geändert, je nachdem die Bewegung nach oder von der Quelle gerichtet ist. Da die Aenderung der Tonhöhe constant ist, so wird auch ferner in der Stimmung die vorhandene musikalische Vollkommenheit gehört, wenn auch in dem zweiten Falle, wo a und v nahezu gleich sind, das Sinken der Tonhöhe so gross ist, dass dadurch jeder musikalische Charakter zerstört wird. Könnten wir annehmen, dass v grösser wie a ist, so würde ein Schall, der nach Beginn der Bewegung erzeugt würde, den Beobachter niemals erreichen; Schalle aber, welche vorher erzeugt worden wären, würden allmälig eingeholt und in umgekehrter Ordnung, wie

[1]) Helmholtz, Ueber Combinationstöne. Pogg. Ann. Bd. XCIX, p. 497. 1856.

ihnen natürlich ist, gehört werden. Ist $v = 2a$, so würde der Beobachter ein Musikstück in richtigem Zeitmaass und Ton, aber rückwärts hören.

Entsprechende Resultate ergeben sich, wenn die Schallquelle in Bewegung und der Beobachter in Ruhe ist, da die eintretende Aenderung nur von der relativen Bewegung in der Hörlinie abhängt. Bewegen sich Quelle und Beobachter mit derselben Geschwindigkeit, so tritt in der Schwingungszahl keine Aenderung ein, gleichgültig, ob sich das Medium bewegt oder nicht. Bei einer relativen Bewegung von 6,4 km in der Stunde ist die Aenderung der Tonhöhe sehr bemerkbar, sie beträgt etwa einen halben Ton. Das Pfeifen einer Locomotive wird bei der Annäherung der letzteren zu hoch gehört und zu niedrig, wenn sie sich von einem Beobachter auf einer Station entfernt, indem es sich in dem Augenblicke des Vorübersausens der Maschine ziemlich plötzlich ändert.

Das Princip der Aenderung der Tonhöhe bei einer relativen Bewegung wurde zuerst von Doppler[1]) ausgesprochen und wird oft das Doppler'sche Princip genannt. Befremdlich genug wurde seine Berechtigung von Petzval[2]) angefochten, dessen Einwurf von der Verwechslung zweier vollständig verschiedener Fälle herrührte, demjenigen, wo eine relative Bewegung der Quelle und des Empfängers vorhanden ist, und dem, wo sich das Medium bewegt, während sich die Quelle und der Empfänger in Ruhe befinden. In dem letzteren Falle sind die Umstände mechanisch dieselben, als wenn das Medium in Ruhe wäre und die Quelle und der Empfänger eine gemeinsame Bewegung hätten; deshalb ist hier auch nach dem Doppler'schen Principe keine Aenderung in der Tonhöhe zu erwarten.

Das Doppler'sche Princip wurde experimentell von Buijs Ballot[3]) und Scott Russell bestätigt. Der letztere untersuchte die Aenderung der Tonhöhe an musikalischen

---

[1]) Theorie des farbigen Lichtes der Doppelsterne. Prag 1842. Siehe Pisko, Die neueren Apparate der Akustik. Wien 1865.

[2]) Wien. Ber. VIII, 134, 1852. Fortschritte der Physik, VIII, 167.

[3]) Pogg. Ann. LXVI, p. 321.

Instrumenten, welche sich auf Locomotiven befanden. Ein Laboratoriumsapparat, um die von der Bewegung herrührende Tonänderung nachzuweisen, wurde von Mach[1]) construirt. Er besteht aus einer 8 Fuss langen Röhre, welche sich um eine Axe durch ihren Mittelpunkt drehen lässt. An dem einen Ende befindet sich ein kleines Pfeifchen oder eine kleine Orgelpfeife, die durch längs der Axe der Röhre getriebenen Wind angeblasen wird. Ein Beobachter, welcher sich in der Rotationsebene befindet, hört einen Klang von veränderlicher Höhe; wenn er sich indessen in der Verlängerung der Rotationsaxe aufstellt, so wird der Schall stetig. Der einfachste Versuch ist vielleicht der von König beschriebene[2]). Zwei auf c'' abgestimmte und mit Resonanzkästen versehene Stimmgabeln sind so abgepasst, dass sie mit einander vier Schwebungen in der Secunde geben. Nähert man die tiefere der Gabeln dem Ohre, während die andere in Ruhe bleibt, so wird für jede zwei Fuss Annäherung eine Schwebung verloren; wird indessen die höhere der beiden Gabeln dem Ohre genähert, so wird auf derselben Entfernung eine Schwebung gewonnen. Eine von Mayer[3]) herrührende Modification dieses Versuches mag gleichfalls erwähnt werden. Hierbei erregt eine Gabel die Schwingung einer zweiten mit ihr selbst im Einklang befindlichen, wobei die Erregung der letzteren durch ein kleines Pendel sichtbar gemacht wird, dessen Kugel gegen die Enden einer der Zinken ruht. Bleibt die erregende Gabel an ihrem Orte, so ist die Wirkung in einer Entfernung von 60 Fuss sichtbar; sie hört aber auf, sowie die erregende Gabel rasch in der Richtung der die beiden Gabeln verbindenden Linie hin und her bewegt wird.

Die mathematische Behandlung des Problemes einer bewegten Quelle ist einigermaassen schwierig aus dem Grunde, weil jede wirkliche Quelle zugleich auch als Hinderniss wirkt. So würden wir bei einer durch die Luft bewegten Glocke die Lösung eines Problemes fordern, das an sich schwierig genug

[1]) Pogg. Ann. CXII, p. 66. 1861 und CXVI, p. 333.

[2]) König's Catalogue des Appareils d'Acoustique. Paris 1865.

[3]) Phil. Mag. (4) XLIII, p. 278, 1872.

ist, auch wenn auf Schwingungen überhaupt keine Rücksicht genommen wird. Es würde aber die Lösung eines solchen Problemes, selbst wenn sie erhalten werden könnte, kein specielleres Licht auf das Doppler'sche Gesetz werfen; wir können daher mit Vortheil die Frage dadurch vereinfachen, dass wir an Stelle der Glocke den idealen Fall einer einfachen Quelle nehmen.

In §. 147 betrachteten wir das Problem einer bewegten Störungsquelle für eine gespannte Saite. Die Theorie der Luftwellen von einer Dimension ist genau ähnlich; für den allgemeinen Fall aber von drei Dimensionen muss dieselbe etwas ausgedehnt werden, um der Möglichkeit einer Bewegung senkrecht gegen die Richtung der Schallstrahlen Rechnung zu tragen. Aus §§. 273, 276 geht hervor, dass die Wirkung einer Schallquelle in irgend einem Punkte O dieselbe ist, ob sich die Quelle in Ruhe befindet, oder ob sie sich in irgend einer Weise auf der Oberfläche eines um O als Mittelpunkt beschriebenen Kreises bewegt. Bewegt sich die Quelle in einer solchen Weise, dass sie ihre Entfernung (r) von O ändert, so wird ihre Wirkung in zweierlei Hinsicht beeinflusst. Nicht allein wird die Phase der Störung bei der Ankunft in O geändert durch die Veränderung der Entfernung, sondern auch die Amplitude erleidet eine Aenderung. Die letztere Complication darf jedoch ausser Rechnung gelassen werden, so lange wir uns auf den Fall beschränken, wo die Quelle hinreichend entfernt liegt. Wenn dieses beachtet wird, so können wir sagen, dass die Wirkung einer zur Zeit t und in der Entfernung r erzeugten Störung bei O dieselbe ist, wie die einer gleichen Störung, welche zur Zeit $t + \delta t$ und in der Entfernung $r - a\,\delta t$ entsteht. Bei einer periodischen Störung ist eine Annäherungsgeschwindigkeit (v) äquivalent mit einer Vergrösserung der Schwingungszahl in dem Verhältnisse $a : a + v$.

299. Wir wollen nun die von inneren Schallquellen herrührenden erzwungenen Schwingungen der in einem rechtwinkligen Raume enthaltenen Luft untersuchen. Aus §. 267 geht hervor, dass das Resultat einer anfänglichen Verdichtung,

welche auf die Nachbarschaft des Punktes ξ, η, ζ beschränkt ist, zur Zeit t lautet:

$$\varphi = \Sigma\Sigma\Sigma\, \varkappa a B_{pqr} \cos \varkappa a t \cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right)\cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right)\cos\left(r\frac{\pi z}{\gamma}\right) \ldots (1),$$

worin:

$$\varkappa a B_{pqr} = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \cos\left(p\frac{\pi\xi}{\alpha}\right) \cos\left(q\frac{\pi\eta}{\beta}\right)$$

$$\times \cos\left(r\frac{\pi\zeta}{\gamma}\right) \int\int\int \varphi_0\, dx\, dy\, dz \ \ldots \ (2);$$

hieraus lässt sich wie in §. 276 die Wirkung einer äusseren Kraft ableiten. Bezeichnen wir die Störung $\int\int\int \varphi_{t'}\, dx\, dy\, dz$, welche zur Zeit t' ertheilt wird, mit $\int\int\int \Phi(t')\, dt'\, dx\, dy\, dz$ oder mit $\Phi_1(t')\, dt'$, so lautet die resultirende Störung zur Zeit t:

$$\varphi = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \Sigma\Sigma\Sigma \cos\left(p\frac{\pi x}{\alpha}\right) \cos\left(q\frac{\pi y}{\beta}\right) \cos\left(r\frac{\pi z}{\gamma}\right)$$

$$\times \cos\left(p\frac{\pi\xi}{\alpha}\right)\cos\left(q\frac{\pi\eta}{\beta}\right)\cos\left(r\frac{\pi\zeta}{\gamma}\right)\int_{-\infty}^{t} \Phi_1(t') \cos\varkappa a(t-t')\, dt' \ldots (3).$$

Die Symmetrie dieses Ausdruckes in Bezug auf x, y, z und ξ, η, ζ ist ein Beispiel des Reciprocitätsprincipes (§. 107).

Für eine harmonische Kraft, für welche $\Phi_1(t') = A \cos mat'$, haben wir mit dem Werthe von:

$$\int_{-\infty}^{t} \cos mat' \cos\varkappa a(t-t')\, dt \ \ldots \ (4)$$

zu thun.

Genau gesprochen, hat dieses Integral keinen bestimmten Werth. Wünschen wir aber nur den Ausdruck für die erzwungenen Schwingungen, so müssen wir die zu integrirende Function an der unteren Grenze vernachlässigen, wie man erkennen kann, wenn man die Einführung von sehr kleinen dissipativen Kräften annimmt. Wir erhalten so:

$$\int_{-\infty}^{t} \Phi_1(t') \cos\varkappa a\,(t-t')\, dt' = A\,\frac{ma \sin mat}{(m^2-\varkappa^2)\,a^2} \ldots (5).$$

Wie vorhergesagt werden konnte, wird der Ausdruck bei einer Coincidenz zwischen der Periode der Quelle und einer der natürlichen Perioden des Raumes unendlich. Jede particuläre Normalschwingung wird nicht erregt, wenn sich die Schallquelle in einem ihrer Bäuche befindet.

Die Wirkung einer grösseren Anzahl von Quellen kann leicht durch Summation oder Integration ermittelt werden.

300. Wird ein Schall innerhalb einer cylindrischen Pfeife erregt, so besteht die einfachste Art der Erregung, welche wir uns denken können, in der erzwungenen Bewegung eines Kolbens. In diesem Falle sind die Wellen von Anfang an eben. Es ist aber gleichfalls von Wichtigkeit, zu untersuchen, was eintritt, wenn die Quelle, anstatt gleichmässig über den Querschnitt vertheilt zu sein, auf einen Punkt in diesem concentrirt wird. Nehmen wir an (was indessen ohne Vorbehalt nicht richtig ist), dass in einer genügenden Entfernung von der Quelle die Wellen eben werden, so reicht das Reciprocitätsgesetz dazu aus, uns zu unserm gewünschten Ziele zu bringen.

Es sei A eine einfache Quelle in einer unbegrenzten Röhre, B, B' zwei Punkte desselben normalen Querschnittes in dem Bereiche der ebenen Wellen. Nach der Annahme sind die von der Quelle A herrührenden Potentiale in B und B' dieselben, und nach dem Reciprocitätsgesetz geben gleiche Quellen in B und B' dasselbe Potential in A. Hieraus folgt, dass die Wirkung jeder Quelle in einiger Entfernung dieselbe ist, als wenn die Quelle gleichmässig über den durch sie hindurchgehenden Querschnitt vertheilt wäre. Sind z. B. B und B' gleiche Quellen mit entgegengesetzter Phase, so würde die Störung in A gleich Null sein.

Die von einer einfachen innerhalb einer Röhre liegenden Quelle ausgesandte Energie kann nun berechnet werden. Ist der Querschnitt der Röhre σ, und ist die Quelle derart, dass das von ihr herrührende Potential in der freien Luft sein würde:

$$\varphi = -\frac{A}{4\pi} \cdot \frac{\cos \varkappa (at - r)}{r} \quad \ldots \ldots \ldots (1),$$

so wird das Geschwindigkeitspotential in einiger Entfernung innerhalb der Röhre dasselbe sein, als wenn die Ursache der Störung in der Bewegung eines Kolbens im Ursprunge läge, welche dieselbe Totalverschiebung giebt; die ausgesandte Energie ist in beiden Fällen gleichfalls dieselbe. Nun haben wir nach (1):

$$2\pi r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{2} A \cos \varkappa a t$$

schliesslich; daher dürfen wir, wenn ψ das Geschwindigkeitspotential der ebenen Wellen in der Röhre (die parallel zu z angenommen wird) bezeichnet, setzen:

$$\sigma \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2} A \cos \varkappa (at - z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

diesem entsprechend ist:

$$\psi = -\frac{aA}{2\sigma} \cos \varkappa (at - z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Demnach wird, wie in §. 245, die auf jeder Seite der Quelle ausgegebene Energie (W) gegeben durch:

$$\frac{dW}{dt} = \sigma \left(-\varrho \psi \frac{d\psi}{dz}\right)_{z=0} = \frac{\varrho a A^2}{4\sigma} \cos^2 \varkappa a t;$$

so dass schliesslich:

$$W = \frac{\varrho a A^2}{8\sigma} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wird die Röhre durch einen unbeweglichen Kolben, der sich nahe bei der Quelle befindet, abgeschlossen, so wird die ganze Energie nach einer Richtung ausgesandt; das ist aber nicht Alles. Wegen des verdoppelten Druckes wird doppelt so viel Energie wie vorher entwickelt; daher ist in diesem Falle:

$$W = \frac{\varrho a A^2}{2\sigma} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Je enger die Röhre, desto grösser ist die von einer gegebenen Quelle ausgehende Energie. Es hat Interesse, die Wirksamkeit einer Quelle an dem geschlossenen Ende einer cylindrischen Röhre mit der einer im Scheitel eines Kegels gelegenen

gleichen Quelle zu vergleichen. Aus §. 280 haben wir in dem letzteren Falle:

$$W' = \varrho \frac{\varkappa^2 a A^2}{2\omega} t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

so dass:

$$W : W' = \omega : \varkappa^2 \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Die in den beiden Fällen ausgesandten Energien sind dieselben, wenn $\omega = \varkappa^2 \sigma$, das ist, wenn der Querschnitt des Cylinders gleich der durch den Kegel von einer Kugel mit dem Radius $\varkappa^{-1}$ abgeschnittenen Fläche ist.

301. Wir haben nun zu untersuchen, in wie weit es richtig ist, dass Schwingungen innerhalb einer cylindrischen Röhre in einem hinreichenden Abstande von ihrem Ursprunge annähernd eben werden. Die Axe der z sei parallel den erzeugenden Linien des Cylinders; wir wollen dann die Bewegung, deren Potential proportional $e^{i\varkappa a t}$ ist, auf der positiven Seite einer bei $z = 0$ gelegenen Quelle untersuchen. Bedeutet φ das Potential, und wird ∇^2 für $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$ gesetzt, so lautet die Bewegungsgleichung:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \nabla^2 + \varkappa^2\right) \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Ist φ von z unabhängig, so stellt diese Gleichung Schwingungen dar, welche ganz transversal zur Axe des Cylinders sind. Wenn dann das Potential proportional zu e^{ipat} ist, so muss dasselbe sowohl der folgenden Gleichung genügen:

$$(\nabla^2 + p^2)\varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wie der Bedingung, dass über die Begrenzung des Querschnittes hin:

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Damit diese Gleichungen mit einander verträglich sind, ist p auf gewisse bestimmte Werthe beschränkt, welche den Perioden der natürlichen Schwingungen entsprechen. Der Werth Null für p giebt $p = constans$, welche Lösung wir, wenn

sie auch in dem Probleme von zwei Dimensionen keine Bedeutung hat, zunächst zu betrachten haben. Für jeden zulässigen Werth von p ist eine bestimmte Normalfunction u von x und y (§. 92) von der Art vorhanden, dass die Lösung wird:

$$\varphi = A u e^{ipat} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Je zwei Functionen u, u', welche verschiedenen Werthen von p entsprechen, sind einander conjugirt, das ist, sie geben:

$$\int\int u u' \, dx \, dy = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5);$$

jede Function von x und y kann innerhalb der Begrenzung des Querschnittes in folgende Reihe entwickelt werden:

$$\varphi = A_0 u_0 + A_1 u_1 + A_2 u_2 + \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

worin u_0, entsprechend $p = 0$, constant ist.

In dem wirklichen Probleme lässt sich φ ebenfalls noch in dieselbe Reihe entwickeln, vorausgesetzt, dass A_0, A_1 etc. als Functionen von z angesehen werden. Durch Einsetzung in (1) haben wir mit Rücksicht auf (2):

$$u_0 \left\{ \frac{d^2 A_0}{dz^2} + \varkappa^2 A_0 \right\} + u_1 \left\{ \frac{d^2 A_1}{dz^2} + (\varkappa^2 - p_1^2) A_1 \right\}$$
$$+ u_2 \left\{ \frac{d^2 A_2}{dz^2} + (\varkappa^2 - p_2^2) A_2 \right\} + \ldots = 0 \quad \ldots \quad (7),$$

worin wegen der conjugirten Eigenschaft der Normalfunctionen jeder Coefficient von u einzeln verschwinden muss. Sonach ist:

$$\frac{d^2 A_0}{dz^2} + \varkappa^2 A_0 = 0, \quad \frac{d^2 A}{dz^2} + (\varkappa^2 - p^2) A = 0 \ldots (8).$$

Die Lösung der ersten dieser Gleichungen lautet:

$$A_0 = \alpha_0 e^{i\varkappa z} + \beta_0 e^{-i\varkappa z}$$

und giebt:

$$\varphi_0 + \alpha_0 u_0 e^{i\varkappa(at + z)} + \beta_0 u_0 e^{i\varkappa(at - z)} \quad \ldots \quad (9).$$

Die Lösung der allgemeinen Gleichung für A hat verschiedenes Aussehen, je nachdem $\varkappa^2 - p^2$ positiv oder negativ ausfällt. Ist die erzwungene Schwingung in der Tonhöhe tiefer wie die tiefste der natürlichen, rein transversalen, Schwin-

gungen, so ist jeder endliche Werth von p^2 grösser wie der von $\varkappa^2$, oder $\varkappa^2 - p^2$ ist immer negativ. Setzen wir:

$$\varkappa^2 - p^2 = - \mu^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

so haben wir:

$$A = \alpha e^{\mu z} + \beta e^{-\mu z},$$

woraus:

$$\varphi = (\alpha e^{\mu z} + \beta e^{-\mu z}) u e^{i \varkappa a t} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Unter den angenommenen Umständen liegt es nun auf der Hand, dass die Bewegung mit z nicht unendlich wird, so dass alle Coefficienten α verschwinden. Aus einem etwas anderen Grunde gilt dasselbe für α_0, da keine Welle in der negativen Richtung vorhanden sein kann. Wir dürfen daher setzen:

$$\varphi = \beta_0 e^{i \varkappa (a t - z)} + \beta_1 u_1 e^{-\mu_1 z} e^{i \varkappa a t} + \beta_2 u_2 e^{-\mu_2 z} e^{i \varkappa a t} + \ldots (12);$$

dieser Ausdruck reducirt sich auf sein erstes Glied, wenn z hinreichend gross ist. Wir schliessen hieraus, dass in allen Fällen die Wellen schliesslich eben werden, wenn die erzwungene Schwingung tiefer wie die tiefste der natürlichen Transversalschwingungen ist.

Bei einem kreisförmigen Cylinder vom Radius r hat die tiefste Transversalschwingung eine Wellenlänge gleich $2 \pi r : 1{,}841 = 3{,}413\, r$ (§. 339). Uebertrifft also die Wellenlänge der erzwungenen Schwingung den Werth $3{,}413\, r$, so werden die Wellen schliesslich eben. Es kann indessen vorkommen, dass die Wellen schliesslich eben werden, wenn auch die Wellenlänge etwas unter der obigen Grenze ausfällt. Wenn z. B. die Quelle der Schwingung symmetrisch mit Bezug auf die Axe der Röhre ist, wenn sie also etwa aus einer einfachen Quelle auf der Axe selbst besteht, so ist die tiefste Transversalschwingung, mit welcher wir zu thun haben, mehr wie eine Octave höher wie in dem allgemeinen Falle, und dem entsprechend kann die Wellenlänge der erzwungenen Schwingung um die Hälfte kleiner sein, wie der obige Werth ist.

Aus (12) folgt, wenn $z = 0$:

$$\frac{d\varphi}{dz} = - i \varkappa \beta_0 e^{i \varkappa a t} - \mu_1 \beta_1 u_1 e^{i \varkappa a t} - \ldots,$$

woraus:

$$\int\int \frac{d\varphi}{dz}\, d\sigma = -\, i\varkappa\beta_0\, \sigma e^{i\varkappa a t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

insofern, als $\int\int u_1\, d\sigma, \int\int u_2\, d\sigma$ etc. sämmtlich verschwinden.

Aus dem Gesagten geht also hervor, dass die ebenen Wellen in einiger Entfernung dieselben sind wie diejenigen, welche durch einen starren Kolben im Ursprunge erzeugt würden, welcher Kolben dieselbe mittlere Normalgeschwindigkeit giebt, die wirklich vorhanden ist. Jede Normalbewegung, deren negative und positive Theile einander gleich sind, bringt schliesslich keine Wirkung hervor.

Wird in Betreff der Art der Quelle keine Einschränkung gemacht, und sind einige der natürlichen Transversalschwingungen tiefer, wie eine der wirklich vorhandenen, so sind einige der Werthe von $\varkappa^2 - p^2$ positiv, und dann treten Glieder ein von der Form:

$$\varphi = \beta u\, e^{i\varkappa a t}\, e^{-i\sqrt{(\varkappa^2 - p^2)}\, z},$$

oder in reellen Grössen:

$$\varphi = \beta u \cos\left\{\varkappa a t - \sqrt{(\varkappa^2 - p^2)}\, z\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14);$$

sie geben an, dass die besonderen Eigenschaften der Quelle unendlich weit fortgepflanzt werden.

Das hier betrachtete Problem lässt sich als eine Verallgemeinerung desjenigen in §. 268 ansehen. Für einen kreisförmigen Cylinder kann es mit Hülfe der Bessel'schen Functionen vollständig gelöst werden. Doch das muss dem Leser überlassen bleiben.

302. Im §. 278 haben wir die Bewegung der Luft, welche von der normalen periodischen Bewegung einer ebenen Begrenzung von unendlicher Ausdehnung herrührt, vollständig bestimmt. Ist $\frac{d\varphi}{dn}$ die gegebene Normalgeschwindigkeit im Elemente dS, so giebt uns:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{d\varphi}{dn}\, \frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\, dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

das Geschwindigkeitspotential in jedem Punkte P, welcher in

der Entfernung r von dS ab liegt. Den Rest dieses Capitels wollen wir der Untersuchung eines speciellen Falles des allgemeinen Problemes widmen, des Falles nämlich, wo die Normalgeschwindigkeit auf einer kreisförmigen Fläche vom Radius R einen gegebenen constanten Werth hat, während sie auf dem übrigen Theile der Ebene gleich Null ist. Im Besonderen wollen wir aufsuchen, welche Kräfte, herrührend von der Reaction der Luft, auf eine starre kreisförmige Platte wirken, die nach einer einfachen harmonischen Bewegung in einer gleich grossen kreisförmigen, aus einer unendlich grossen, starren, ebenen Platte ausgeschnittenen Oeffnung schwingt.

Wir haben für die ganze auf die Platte wirkende Druckänderung (§. 244):

$$\int\int \delta p \, dS = -\sigma \int\int \dot{\varphi} \, dS = -i\varkappa a \sigma \int\int \varphi \, dS,$$

worin σ die natürliche Dichte bedeutet, und φ sich wie $e^{i\varkappa a t}$ ändert. Daher ist nach (1):

$$\int\int \delta p \, dS = \frac{i\varkappa a \sigma}{\pi} \frac{d\varphi}{dn} \sum\sum \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \, dS \, dS' \ldots (2).$$

In der Doppelsumme:

$$\sum\sum \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \, dS \, dS' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

deren Werth wir nun auszurechnen haben, muss jedes Paar von Elementen nur einmal genommen werden; das Product der Elemente ist zu summiren, nachdem man es mit dem Factor $r^{-1} e^{-i\varkappa a t}$ multiplicirt hat, welcher von dem gegenseitigen Abstande der letzteren abhängt. Die beste Methode hierzu ist die von Prof. Maxwell für das gewöhnliche Potential angegebene[1]). Die Grösse (3) wird als die Arbeit angesehen, welche bei der vollständigen Dissociation der die Platte bildenden Materie verzehrt würde, d. h. bei der Entfernung eines jeden Elementes aus dem Einflusse der anderen, unter der Annahme, dass das Potential je zweier Elemente proportional mit $r^{-1} e^{-i\varkappa r}$ ist. Bei der zum Zwecke der Berechnung der

---

1) Theory of Resonance. Phil. Trans. 1870.

erforderlichen Arbeit, die nur von dem Anfangs- und dem Endzustande abhängt, zu treffenden Wahl des Weges, auf welchem diese Dissociation geschieht, ist man in keiner Weise beschränkt. Man darf den zweckmässigsten nehmen, und deshalb denken wir uns, dass die Scheibe in elementare Ringe getheilt, und dass jeder Ring unendlich weit weggeschafft ist, bevor einer der von ihm eingeschlossenen Ringe gestört wird.

Der erste Schritt ist die Berechnung des Potentiales (V) an der Kante einer Scheibe vom Radius c. Nehmen wir Polarcoordinaten (ϱ, ϑ) mit Bezug auf irgend einen Punkt der Umgrenzung als Pol, so haben wir:

$$V = \int\int \frac{e^{-i\varkappa\varrho}}{\varrho} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2c\cos\vartheta} e^{-i\varkappa\varrho} \, d\varrho \, d\vartheta$$

$$= \frac{2}{i\varkappa} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \{1 - e^{-2i\varkappa c \cos\vartheta}\} \, d\vartheta.$$

Diese Grösse muss mit $2\pi c dc$ multiplicirt und nachher in Bezug auf c zwischen den Grenzen 0 und R integrirt werden. Es wird indessen zweckmässig sein, zuvörderst eine Transformation vorzunehmen. Wir haben:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-2i\varkappa c \cos\vartheta} \, d\vartheta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-2i\varkappa c \sin\vartheta} \, d\vartheta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(2\varkappa c \sin\vartheta) \, d\vartheta - \frac{2i}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(2\varkappa c \sin\vartheta) \, d\vartheta$$

$$= J_0(z) - iK(z) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

worin z an Stelle von $2\varkappa c$ geschrieben wurde. $J_0(z)$ ist die Bessel'sche Function von der Ordnung Null (§. 200), und $K(z)$ eine Function, welche durch folgende Gleichung definirt wird:

$$K(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(z \sin\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{z - \frac{z^3}{1^2.3^2} + \frac{z^5}{1^2.3^2.5^2} - \frac{z^7}{1^2.3^2.5^2.7^2} + \ldots\right\} \quad . \;.\;. \quad (5).$$

Verschieben wir noch augenblicklich die nähere Betrachtung der Function K; wir haben also:

$$V = \frac{\pi}{\varkappa}\,[K(z) - i\,\{1 - J_0(z)\}] \quad . \;.\;.\;.\;. \quad (6),$$

und daher:

$$\Sigma\Sigma\,\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\,dS\,dS' = \frac{\pi^2}{2\,\varkappa^3}\int_0^{2\varkappa R} z\,dz\,[K(z) - i\,\{1 - J_0(z)\}].$$

Nach (6) §. 200 und (8) §. 204 ist nun:

$$\int_0^z z\,dz\,J_0(z) = z\,J_1(z) \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (7);$$

daher dürfen wir, wenn K_1 definirt wird durch:

$$K_1(z) = \int_0^z z\,dz\,K(z) \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (8),$$

schreiben:

$$\Sigma\Sigma\,\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\,dS\,dS' = \frac{\pi^2}{2\varkappa^3}\,K_1(2\,\varkappa R)$$

$$- i\,\frac{\pi^2 R^2}{\varkappa}\left(1 - \frac{J_1(2\,\varkappa R)}{\varkappa R}\right) \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (9).$$

Hieraus lässt sich der Gesammtdruck durch Einführung des Factors $\frac{i\varkappa a\sigma}{\pi}\,\frac{d\varphi}{dn}$ ableiten, so dass:

$$\iint \delta p\,dS = a\sigma\,.\,\pi R^2\,\frac{d\varphi}{dn}\left(1 - \frac{J_1(2\,\varkappa R)}{\varkappa R}\right)$$

$$+ i\,\frac{a\,\sigma\,\pi}{2\,\varkappa^2}\,\frac{d\varphi}{dn}\,K_1(2\,\varkappa R) \quad . \;.\;. \quad (10).$$

Die Reaction der Luft auf die Scheibe kann also in zwei Theile getheilt werden, von welchen der erste proportional mit

der Geschwindigkeit der Scheibe, der zweite proportional mit der Beschleunigung ist. Bezeichnet ξ die Verschiebung der Scheibe, so dass $\dot{\xi} = \frac{d\varphi}{dn}$, so haben wir $\ddot{\xi} = i\varkappa a \dot{\xi} = i\varkappa a \frac{d\varphi}{dn}$; demnach wird in der Bewegungsgleichung der Scheibe die Reaction der Luft dargestellt durch eine Reibungskraft:

$$a\sigma . \pi R^2 . \dot{\xi} \left(1 - \frac{J_1(2\varkappa R)}{\varkappa R}\right),$$

welche die Bewegung verzögert, und durch einen Zuwachs von Energie gleich $\frac{\pi\sigma}{2\varkappa^3} K_1(2\varkappa R)$.

Ist $\varkappa R$ klein, so folgt aus der aufsteigenden Reihe für J_1 (5) §. 200:

$$1 - \frac{J_1(2\varkappa R)}{\varkappa R} = \frac{\varkappa^2 R^2}{1 . 2} - \frac{\varkappa^4 R^4}{1 . 2^2 . 3} + \frac{\varkappa^6 R^6}{1 . 2^2 . 3^2 . 4}$$
$$- \frac{\varkappa^8 R^8}{1 . 2^2 . 3^2 . 4^2 . 5} + \ldots \ldots \ldots \quad (11),$$

so dass das Reibungsglied annähernd gleich ist:

$$\frac{1}{2} a\sigma . \pi R^2 . \varkappa^2 R^2 . \dot{\xi} \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Wegen der Art des vorliegenden Problemes muss der Coefficient von $\dot{\xi}$ positiv sein, sonst würde die Reaction der Luft die Bewegung zu vergrössern streben, anstatt sie zu hindern. Dass $J_1(z)$ thatsächlich immer kleiner wie $\frac{1}{2} z$ ist, kann auf folgende Weise nachgewiesen werden. Liegt ϑ zwischen 0 und π und ist z positiv, so fällt $\sin(z \sin\vartheta) - z \sin\vartheta$ negativ aus; daher wird gleichfalls:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\sin(z\sin\vartheta) - z\sin\vartheta\} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

negativ sein. Dieses Integral ist aber $J_1(z) - \frac{1}{2} z$, welcher Ausdruck demgemäss für alle positiven Werthe von z negativ wird.

Für ein grosses $\varkappa R$ strebt $J_1(2\varkappa R)$ zu verschwinden. dann wird das Reibungsglied einfach $a\sigma \,.\, \pi R^2 \,.\, \dot{\xi}$. Dieses Resultat konnte erwartet werden; denn es wird, wenn $\varkappa R$ sehr gross ist, die Wellenbewegung in der Nachbarschaft der Scheibe annähernd eben. Wir haben dann nach (6) und (8), §. 245, $dp = a\varrho_0 \dot{\xi}$, worin ϱ_0 die Dichtigkeit (σ) bedeutet, so dass die verzögernde Kraft ist $\pi R^2 \delta p = a\sigma \,.\, \pi R^2 \,.\, \dot{\xi}$.

Nun ist das Glied ins Auge zu fassen, welches eine Aenderung der Trägheit darstellt; unter Anderem ist zu beweisen, dass diese Aenderung in einer Vergrösserung besteht, oder dass $K_1(z)$ einen positiven Werth hat. Durch directe Integration der aufsteigenden Reihe (5) für K (welche immer convergent ist) folgt:

$$K_1(z) = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{z^3}{1^2.3} - \frac{z^5}{1^2.3^2.5} + \frac{z^7}{1^2.3^2.5^2.7} - \dots\right\} \dots (13).$$

Ist demnach $\varkappa R$ klein, so dürfen wir als Ausdruck für den Zuwachs der Trägheit nehmen:

$$\frac{8\sigma R^3}{3} = \sigma \,.\, \pi R^2 \cdot \frac{8R}{3\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Dieser Theil der Reaction der Luft lässt sich daher darstellen durch die Annahme, dass die schwingende Platte eine Luftmasse mit sich führt, die gleich ist derjenigen, welche ein Cylinder, dessen Grundfläche die Platte und dessen Höhe gleich $\frac{8R}{3\pi}$ ist, enthält, so dass, falls die Platte hinreichend klein ist, die hinzuzufügende Masse von der Schwingungsperiode unabhängig sein wird.

Aus der Reihe (5) für $K(z)$ lässt sich sofort beweisen, dass:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right)K(z) = \frac{2}{\pi z} - K(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

oder:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + 1\right)K(z) = \frac{2}{\pi z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Aus der ersten Form (15) folgt, dass:

$$K_1(z) - \int_0^z K(z)\, z\, dz = \frac{2}{\pi} z - z \frac{dK(z)}{dz} \quad . \; . \; . \; (17).$$

Vermittelst dieses Ausdruckes für $K_1(z)$ können wir leicht nachweisen, dass diese Function immer positiv sein muss. Denn:

$$\frac{dK(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(z \sin\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(z \sin\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; (18),$$

so dass:

$$K_1(z) = \frac{2z}{\pi} \left\{ 1 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(z \sin\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta \right\}$$

$$= \frac{4z}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\left(\frac{1}{2} z \sin\vartheta\right) \sin\vartheta\, d\vartheta \quad . \; . \; . \; (19),$$

ein Integral, in welchem jedes Element positiv ist. Für ein sehr grosses z ändert $\cos(z \sin\vartheta)$ mit grosser Geschwindigkeit sein Zeichen; daher nähert sich $K_1(z)$ der Form:

$$K_1(z) = \frac{2}{\pi} \cdot z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20).$$

Ist z gross, so werden die aufsteigenden Reihen für K und K_1, wenn sie auch schliesslich noch immer convergiren, für praktische Berechnung unbrauchbar; man muss zu anderen Rechnungsmethoden greifen. Es ist zu bemerken, dass die Differentialgleichung (16), welche von K erfüllt wird, dieselbe ist, wie die, welche der Bessel'schen Function J_0 zukommt, mit Ausnahme des Gliedes auf der rechten Seite, das ist $\frac{2}{\pi z}$. Die Function K ist demnach in derjenigen Form enthalten, welche man

erhält, wenn man zu der, zwei willkürliche Constanten enthaltenden, allgemeinen Lösung der Bessel'schen Gleichung irgend eine particulare Lösung von (16) hinzuaddirt. Eine solche particuläre Lösung ist:

$$\frac{1}{2}\pi \,.\, K(z) = z^{-1} - z^{-3} + 1^2 \,.\, 3^2 \,.\, z^{-5}$$

$$- 1^2 . 3^2 . 5^2 . z^{-7} + 1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2 . z^{-9} - \ldots \quad (21),$$

wovon man sich leicht durch Substitution überzeugen kann. Die auf der rechten Seite von (21) stehende Reihe lässt sich trotz ihrer schliesslichen Divergenz für den Fall, dass z gross ist, mit Vortheil zur Berechnung verwenden. Sie ist thatsächlich das analytische Aequivalent von

$$\int_0^\infty e^{-\beta} (z^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \, d\beta;$$

wir dürfen daher setzen:

$$K(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta} d\beta}{\sqrt{z^2 + \beta^2}} + \text{complementäre Function},$$

indem wir die beiden willkürlichen Constanten durch eine Prüfung der für ein sehr grosses z angenommenen Form bestimmen. Vielleicht ist es aber einfacher, die von Lipschitz[1]) für Bessel'sche Functionen eingeschlagene Methode zu verfolgen.

Nach (4) haben wir:

$$J_0(z) - i\,K(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-iz\cos\vartheta} \, d\vartheta = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-izv}\, dv}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \ldots \quad (22).$$

Betrachten wir das Integral $\int \frac{e^{-zw}\, dw}{\sqrt{1 + w^2}}$, in welchem w eine complexe Variable von der Form $u + iv$ ist. Wenn man, wie gewöhnlich, gleichzeitige Werthpaare von u und v durch die

---

[1]) Crelle, Bd. LVI. 1859. Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, S. 59.

Coordinaten eines Punktes darstellt, so sieht man, dass der Werth des Integrales gleich Null ist für den Fall, wo die Integration nach w sich über ein Rechteck erstreckt, dessen Ecken resp. 0, h, $h+i$, i sind, wobei h irgend eine reelle positive Grösse bedeutet. Daher:

$$\int_0^h \frac{e^{-zu}\,du}{\sqrt{1+u^2}} + \int_0^i \frac{e^{-z(h+iv)}\,d(iv)}{\sqrt{1+(h+iv)^2}} + \int_h^0 \frac{e^{-z(u+i)}\,du}{\sqrt{1+(u+i)^2}}$$

$$+ \int_i^0 \frac{e^{-izv}\,d(iv)}{\sqrt{1-v^2}} = 0,$$

woraus für $h=\infty$ folgt:

$$\int_0^1 \frac{e^{-izv}\,dv}{\sqrt{1-v^2}} = -i\int_0^\infty \frac{e^{-zu}\,du}{\sqrt{1+u^2}} + i\int_0^\infty \frac{e^{-z(u+i)}\,du}{\sqrt{1+(u+i)^2}} \quad \ldots (23).$$

Ersetzen wir uz durch β, so lässt sich (23) in folgende Form schreiben:

$$\int_0^1 \frac{e^{-izv}\,dv}{\sqrt{1-v^2}} = -i\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}\,d\beta}{z\sqrt{1+\frac{\beta^2}{z^2}}}$$

$$+ \frac{e^{-i\left(z-\frac{1}{4}\pi\right)}}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta}\beta^{-\frac{1}{2}}\,d\beta}{\sqrt{1-\frac{i\beta}{2z}}} \quad \ldots \quad (24).$$

Das erste Glied rechter Hand fällt ganz imaginär aus, daher folgt aus (22), dass $\frac{1}{2}\pi J_0(z)$ der reelle Theil des zweiten Gliedes ist. Entwickeln wir das Binom unter dem Integralzeichen und integriren nachher gemäss der Formel:

$$\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{q-\frac{1}{2}}\,d\beta = \Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right),$$

so erhalten wir als Entwickelung von $J_0(z)$ nach negativen Potenzen von z:

$$J_0(z) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)}\left\{1 - \frac{1^2.3^2}{1.2.(8z)^2} + \ldots\right\}\cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$+\sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)}\left\{\frac{1^2}{1.8z} - \frac{1^2.3^2.5^2}{1.2.3.(8z)^3} + \ldots\right\}\sin\left(z - \frac{1}{4}\pi\right) \ldots (25).$$

Hält man nach irgend einer gewünschten Anzahl von Gliedern ein und bildet den Ausdruck für den Rest, so lässt sich beweisen, dass der durch Vernachlässigung des Restes begangene Fehler das letzte zurückgehaltene Glied nicht übersteigen kann (§. 200).

Auf gleiche Weise ist der imaginäre Theil des Gliedes auf der rechten Seite von (24) das Aequivalent von $-\frac{1}{2}i\pi K(z)$, so dass:

$$K(z) = \frac{2}{\pi}\left\{z^{-1} - z^{-3} + 1^2.3^2.z^{-5} - 1^2.3^2.5^2.z^{-7} + \ldots\right\}$$

$$+\sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)}\left\{1 - \frac{1^2.3^2}{1.2.(8z)^2} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{1.2.3.4.(8z)^4} - \ldots\right\}\sin\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$-\sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)}\left\{\frac{1^2}{1.8z} - \frac{1^2.3^2.5^2}{1.2.3.(8z)^3} + \ldots\right\}\cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right). \quad . \quad . \quad (26).$$

Der Werth von $K_1(z)$ lässt sich nun mittelst (17) bestimmen. Wir finden:

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{2}{\pi}\{z^{-2} - 3.z^{-4} + 1^2.3^2.5.z^{-6}$$
$$- 1^2.3^2.5^2.7.z^{-8} + \ldots\}$$
$$+\sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)}\cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)\left\{1 + \frac{3.5.1}{1.2.(8z)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{3.5.7.9.1.3.5}{1.2.3.4.(8z)^4} + \ldots\right\}$$
$$-\sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)}\sin\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)\left\{\frac{3}{1.(8z)} - \frac{3.5.7.1.3}{1.2.3.(8z)^3}\right.$$
$$\left. + \frac{3.5.7.9.11.1.3.5.7}{1.2.3.4.5.(8z)^5} - \ldots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Der schliessliche Ausdruck für $K_1(z)$ kann in folgende Form gebracht werden:

$$K_1(z) = \frac{2}{\pi}\{z + z^{-1} - 3 \,.\, z^{-3} + 1^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, z^{-5}$$
$$- 1^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,.\, z^{-7} + \ldots\}$$
$$- \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \cdot \cos\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)\left\{1 - \frac{(1^2-4)(3^2-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, (8z)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{(1^2-4)(3^2-4)(5^2-4)(7^2-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, (8z)^4} - \ldots\right\}$$
$$- \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \cdot \sin\left(z - \frac{1}{4}\pi\right)\left\{\frac{1^2-4}{1 \,.\, 8z}\right.$$
$$\left. - \frac{(1^2-4)(3^2-4)(5^2-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3\,(8z)^3} + \ldots\right\} \quad \ldots \quad (28)^{1)}.$$

Es ergiebt sich also, dass K_1 für ein grosses z nicht verschwindet, sondern sich $\frac{2}{\pi} \cdot z$ nähert. Aber wenn auch der Zuwachs der Trägheit, welcher proportional K_1 ist, mit R unendlich wird, so verschwindet er doch schliesslich im Vergleich zu dem Flächeninhalte der Scheibe und dem anderen Gliede, welches die Zerstreuung darstellt. Dieses Resultat stimmt mit dem überein, was man aus der Theorie der ebenen Wellen voraussagen konnte.

Wenn unabhängig von der Reaction der Luft die Masse der Platte M und die Restitutionskraft [d. i. die in die Gleichgewichtslage zurückziehende Kraft (Anm. des Uebers.)] $\mu\xi$ ist, so lautet die Bewegungsgleichung der Platte, auf welche eine äussere Kraft F, proportional mit $e^{i\varkappa a t}$, wirkt:

$$\left\{M + \frac{\pi\sigma}{2\varkappa^3} K_1(2\varkappa R)\right\}\ddot{\xi} + a\sigma\pi R^2\left(1 - \frac{J_1(2\varkappa R)}{\varkappa R}\right)\dot{\xi}$$
$$+ \mu\xi = F \,.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \quad (29);$$

oder nach (13), falls, wie es bei den praktischen Anwendungen gewöhnlich der Fall sein wird, $\varkappa R$ klein ist:

$$\left(M + \frac{8\sigma R^3}{3}\right)\ddot{\xi} + \frac{a\sigma\pi\varkappa^2 R^4}{2}\dot{\xi} + \mu\xi = F \ldots (30).$$

Zwei particuläre Fälle dieses Problemes verdienen besondere Erwähnung. Zunächst mögen M und μ verschwinden, so dass

1) Wie zu erwarten war, sind die Reihen in den Klammern dieselben, wie die, welche in dem Ausdrucke der Function $J_1(z)$ auftreten.

die Platte, welche selbst ohne Masse ist, keiner anderen Kraft wie F und denjenigen, welche von den Drucken der Luft herrühren, ausgesetzt wird. Da $\ddot{\xi} = i\varkappa a\dot{\xi}$, so ist das Reibungsglied verhältnissmässig zu vernachlässigen; wir erhalten, wenn $\varkappa R$ sehr klein ist:

$$a\sigma\pi R^2 \cdot \frac{8\varkappa R}{3\pi}\dot{\xi} = -iF \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

Weiter seien M und μ derart, dass die natürliche Periode der Platte, wenn letztere der Reaction der Luft ausgesetzt wird, dieselbe ist, wie die ihr aufgezwungenen. Unter diesen Umständen haben wir:

$$\left(M + \frac{8\sigma R^3}{3}\right)\ddot{\xi} + \mu\xi = 0,$$

und deshalb:

$$a\sigma\pi R^2 \cdot \frac{\varkappa^2 R^2}{2} \cdot \dot{\xi} = F \quad \ldots \ldots \quad (32).$$

Vergleichen wir dies mit (31), so erkennen wir, dass die Schwingungsamplitude in dem Falle, wo der Trägheit der Luft das Gegengewicht gehalten wird, in dem Verhältnisse von $16 : 3\pi\varkappa R$ grösser ist, wie in dem letztbesprochenen Falle; das giebt also einen grossen Zuwachs für ein kleines $\varkappa R$ an. In dem ersten Falle ist die Phase der Bewegung der Art, dass durch die Kraft F vergleichsweise sehr wenig Arbeit geleistet wird, während in dem zweiten Falle die Trägheit der Luft durch die Federkraft compensirt wird; dann thut F, da es dieselbe Phase wie die Geschwindigkeit hat, den Maximalbetrag von Arbeit.

Capitel XVI.

Theorie der Resonatoren.

303. In einer an einem Ende geschlossenen und an dem anderen Ende offenen Pfeife hatten wir ein Beispiel einer Luftmasse, welche die Eigenschaft besitzt, in gewissen bestimmten Perioden zu schwingen, die ihr selbst in mehr oder weniger vollständiger Unabhängigkeit von der äusseren Atmosphäre eigenthümlich sind. Wäre die Luft ausserhalb der Pfeife ganz ohne Masse, so würde die Bewegung in der Pfeife nicht das Bestreben haben, zu entweichen; die in ihr enthaltene Luft würde sich wie jedes andere zusammengesetzte System, das keine Zerstreuung erleidet, verhalten. Bei wirklichen Versuchen vermag man natürlich die Trägheit der äusseren Luft nicht los zu werden, doch kann, wenn der Durchmesser der Pfeife klein ist, die im Verlaufe von wenigen Perioden hervorgerufene Wirkung unbedeutend sein; dann haben Schwingungen, welche einmal in der Pfeife erzeugt sind, einen gewissen Grad von Beständigkeit. Je enger der Verbindungscanal zwischen dem Innern eines Gefässes und dem äusseren Medium ist, desto grösser wird diese Unabhängigkeit. Solche Hohlräume bilden Resonatoren; in Gegenwart einer äusseren Schallquelle schwingt die in dem Resonator enthaltene Luft im Einklange mit jener und mit einer Amplitude, welche von den relativen Grössen der natürlichen und erzwungenen Perioden abhängt in der Weise, dass die Intensität der Schwingung im Falle eines an-

genäherten Isochronismus sehr gross wird. Hört die ursprüngliche Schallquelle auf zu wirken, so giebt der Resonator die Schwingungen wieder zurück, als wenn dieselben in ihm aufgesammelt wären, er wird somit selbst für eine kurze Zeit eine secundäre Quelle. Die Theorie der Resonatoren bildet einen wichtigen Zweig unserer Untersuchung.

Als Einleitung in dieselbe können wir den einfachen Fall eines geschlossenen Cylinders nehmen, in welchem sich ein Kolben ohne Reibung bewegt. Wir nehmen an, dass auf der anderen Seite des Kolbens die Luft der Trägheit beraubt sei, so dass der Druck absolut constant ist. Wird nun der Kolben in eine Schwingung von sehr langer Periode versetzt, so ist es klar, dass die eingeschlossene Luft zu jeder Zeit sich sehr nahezu in der Gleichgewichtsbedingung (gleichförmige Dichte) befindet, welche der augenblicklichen Lage des Kolbens entspricht. Wenn die Masse des Kolbens im Vergleich mit derjenigen der eingeschlossenen Luft sehr beträchtlich ist, so werden die von einer Verschiebung herrührenden natürlichen Schwingungen nahezu gerade so erfolgen, als wenn die Luft keine Trägheit hätte. Bei der Ableitung der Periode aus der kinetischen und der potentiellen Energie kann die erstere berechnet werden ohne Rücksichtnahme auf die Trägheit der Luft, und die zweite so, als wenn die Verdünnung und Verdichtung überall gleichförmig wäre. Unter den betrachteten Umständen wirkt die Luft vermöge ihres Widerstandes gegen Zusammendrückung oder Ausdehnung rein wie eine Feder; die Gestalt des die Luft einschliessenden Gefässes ist daher ohne Bedeutung. Die Schwingungsperiode bleibt dieselbe, vorausgesetzt, dass sich der Rauminhalt nicht ändert.

Wird ein Gas verdichtet oder verdünnt, so findet man den mechanischen Werth der resultirenden Verschiebung, indem man jeden unendlich kleinen Volumenzuwachs mit dem entsprechenden Drucke multiplicirt und dann über dem geforderten Bereich integrirt. In dem vorliegenden Falle ist natürlich nur die Differenz des Druckes auf beiden Seiten des Kolbens die wirklich thätige Ursache, und diese ist für eine kleine Aenderung proportional der Aenderung des Volumens.

Der ganze mechanische Werth der kleinen Aenderung ist derselbe, als wenn sich während des ganzen Verlaufes der Ausdehnung der mittlere Druck, das ist die Hälfte des Enddruckes, dieser Ausdehnung widersetzte. Daher beträgt jener für eine Volumänderung von S auf $S + \delta S$, da $p = a^2 \varrho$:

$$V = p \cdot \frac{\delta S}{2S} \cdot \delta S = \frac{1}{2} \varrho a^2 \frac{(\delta S)^2}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)^{1)}.$$

Bezeichnet A den Flächeninhalt des Kolbens, M seine Masse und x seine lineare Verschiebung, so ist $\delta S = Ax$ und die Bewegungsgleichung lautet:

$$M\ddot{x} + \frac{\varrho a^2 A^2}{S} x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

dieselbe zeigt Schwingungen an, deren Schwingungsdauer ist:

$$\tau = 2\pi : aA \sqrt{\frac{\varrho}{MS}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wir wollen uns nun ein Luft enthaltendes Gefäss denken, dessen Inneres mit der äusseren Atmosphäre durch eine enge Oeffnung oder einen engen Hals in Verbindung steht. Es hat keine Schwierigkeiten, einzusehen, dass dieses System solche Schwingungen ausführen kann, welche den oben betrachteten ähnlich sind, indem die Luft in der Nachbarschaft der Oeffnung die Stelle des Kolbens vertritt. Durch hinreichende Vergrösserung von S kann die Schwingungsperiode so gross gemacht werden, wie wir wollen; schliesslich erhalten wir einen Zustand der Dinge, bei welchem die kinetische Energie mit Ausnahme an der Nachbarschaft der Oeffnung vernachlässigt und die potentielle Energie so berechnet werden kann, als wenn die Dichtigkeit im Innern des Gefässes eine gleichförmige wäre. Beim Hindurchströmen durch die Oeffnung unter der Einwirkung einer Differenz der Drucke auf beiden Seiten oder kraft ihrer eigenen Trägheit, nachdem ein solcher Druck aufgehört hat zu wirken, bewegt sich die Luft annähernd, wie es ein incompressibles Fluidum unter gleichen Umständen thun würde, vorausgesetzt, dass der Raum, in welchem die kinetische Ener-

---

1) Vergl. (12), §. 245.

gie einen merkbaren Werth hat, im Vergleiche zu der Wellenlänge sehr klein ist. Die Voraussetzungen, unter welchen wir die Sache anzugreifen im Begriffe stehen, sind natürlich bei der Anwendung auf wirkliche Resonatoren, wie dieselben im Versuche benutzt werden, nicht genau richtig; dieselben treffen doch nahe genug die Wirklichkeit, um uns einen lehrreichen Einblick in den Gegenstand und in vielen Fällen einen Grund zu geben, auf welchem sich eine hinreichend genaue Berechnung der Tonhöhe aufbauen lässt. Sie werden aber nur im Grenzfalle streng richtig, wo die Wellenlänge unendlich gross im Vergleich mit den Dimensionen des Gefässes ist.

304. Die kinetische Energie der Bewegung eines incompressiblen Fluidums durch einen gegebenen Kanal lässt sich in Werthen der Dichtigkeit ϱ und der Stärke der Uebertragung oder des Stromes $\dot{X}$ ausdrücken; denn unter den betrachteten Umständen bleibt der Charakter der Bewegung immer derselbe. Da sich T nothwendiger Weise wie ϱ und wie $\dot{X}^2$ ändert, so können wir setzen:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \frac{\dot{X}^2}{c} \quad \text{. . . . . (1),}$$

worin die Constante c, welche nur von der Natur des Kanales abhängt, eine lineare Grösse ist, wovon man sich durch die Thatsache überzeugen kann, dass die Dimensioneu von $\dot{X}$ sind: 3 in Bezug auf den Raum und — 1 in Bezug auf die Zeit. In der That ist, wenn φ das Geschwindigkeitspotential darstellt:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int\int\int \left[\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right] dx\, dy\, dz$$
$$= \frac{1}{2} \varrho \int\int \varphi \frac{d\varphi}{dn} dS,$$

nach dem Green'schen Satze, worin die Integration sich über eine Fläche erstreckt, welche den ganzen Bereich einschliesst, in dem die Bewegung merkbar ist. In einem hinreichenden Abstande auf beiden Seiten der Oeffnung wird φ constant;

werden die constanten Werthe mit φ_1 und φ_2 bezeichnet, und wird die Integration auf diejenige Hälfte von S beschränkt, nach welcher das Fluidum hinfliesst, so haben wir:

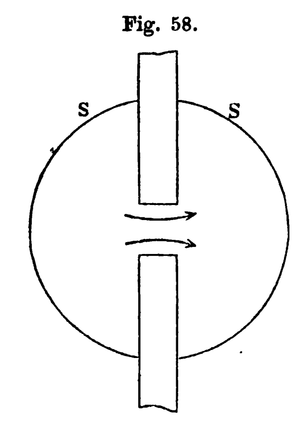
$$T = \frac{1}{2}\,\varrho\,(\varphi_1 - \varphi_2)\int\!\!\int \frac{d\varphi}{dn}\,dS = \frac{1}{2}\,\varrho\,(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{X}.$$

Nun ist, da φ innerhalb S durch seine Oberflächenwerthe linear bestimmt wird, $\int\!\!\int \frac{d\varphi}{dn}\,dS$ oder $\dot{X}$ proportional mit $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Setzen wir $\dot{X} = c\,(\varphi_1 - \varphi_2)$, so erhalten wir wie vorher:

$$T = \frac{1}{2}\,\varrho\,\frac{\dot{X}^2}{c}.$$

Man wird die Art der Constante c besser verstehen, wenn wir das elektrische Problem ins Auge fassen, dessen Bedingungen mathematisch mit den eben besprochenen identisch sind. Wir wollen annehmen, dass das Fluidum durch eine gleichförmig leitende Substanz und dass die Begrenzung des Canales oder der Oeffnung durch Isolatoren ersetzt werden. Es ist uns bekannt, dass für den Fall, wo auf den beiden Seiten durch eine Batterie oder sonstwie eine Differenz des elektrischen Potentiales aufrecht erhalten wird, ein stationärer Strom durch die Oeffnung von der letzteren proportionalen Grösse erzeugt wird. Das Verhältniss des ganzen Stromes zu der elektromotorischen Kraft wird die **Leitungsfähigkeit** des Canales genannt; somit sehen wir, dass unsere Constante c einfach diese Leitungsfähigkeit darstellt unter der Voraussetzung, dass das specifische Leitungsvermögen der hypothetischen Substanz die Einheit ist. Man kann sich auch anders ausdrücken, indem man sagt, dass c die Seite des Würfels darstellt, dessen Widerstand zwischen gegenüberliegenden Flächen derselbe, wie der des

Fig. 58.



Canales ist. Im Folgenden werden wir uns oft der elektrischen Analogien bedienen.

Ist c bekannt, so lässt sich der Eigenton des Resonators leicht ableiten. Da:

$$V = \frac{1}{2} \varrho a^2 \frac{X^2}{S}, \quad T = \frac{1}{2} \varrho \frac{\dot{X}^2}{c} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

so lautet die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{X} + \frac{a^2 c}{S} X = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

dieselbe giebt einfache Schwingungen an, welche in der Zeit:

$$\tau = 2\pi : \sqrt{\frac{a^2 c}{S}} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

ausgeführt werden.

Bezeichnet N die Schwingungszahl oder die Anzahl der in der Zeiteinheit ausgeführten vollständigen Schwingungen, so haben wir:

$$N = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{S}} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Die Wellenlänge, welche die am engsten mit den Dimensionen des Hohlraumes zusammenhängende Grösse ist, wird gegeben durch:

$$\lambda = \frac{a}{N} = 2\pi \sqrt{\frac{S}{c}} \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

und ändert sich direct wie die lineare Dimension. Die Wellenlänge ist, wie bemerkt werden mag, eine Function von der Grösse und Gestalt des Resonators allein, während die Schwingungszahl auch von der Natur des Gases abhängt. Wichtig ist auch, darauf zu achten, dass die Tonhöhe nur von der Natur desjenigen Gases, welches sich innerhalb und in der Nähe des Canales befindet, abhängt und nicht von dem Gase, welches das Innere des Gefässes einnimmt. Denn es kommt die Trägheit der Luft an der letzteren Stelle nicht ins Spiel, während die Compressibilität aller Gase angenähert dieselbe ist. Bei einer Pfeife würde somit die Ersetzung von Luft durch Wasserstoff in der Nachbarschaft eines Knoten geringen Unterschied hervorrufen, in der Nachbarschaft eines Bauches aber sehr wirksam sein.

Bis dahin sprachen wir nur von einem einzigen Verbindungscanal; wenn mehrere vorhanden sind, so wird jedoch das Problem nicht wesentlich geändert. Dieselbe Formel für die Schwingungszahl bleibt anwendbar, wenn, wie vorher, unter *c* die gesammte Leitungsfähigkeit zwischen dem Inneren und dem Aeusseren des Gefässes verstanden wird. Liegen die Canäle weit genug aus einander, um unabhängig von einander zu wirken, so ist die resultirende Leitungsfähigkeit die einfache Summe derer, welche den einzelnen Canälen zukommen; sonst ist die Resultante kleiner wie die durch einfache Addition erhaltene.

Wenn zwei genau gleiche Canäle vorhanden sind, welche nicht mit einander interferiren, und deren Leitungsfähigkeit einzeln genommen *c* ist, so haben wir:

$$N = \sqrt{2} \times \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{S}} \quad \dots\dots\dots \quad (7),$$

dieser Werth zeigt, dass der Klang in dem Verhältniss von $\sqrt{2}:1$ höher ist, als wenn nur ein Canal vorhanden wäre, oder um etwas weniger wie eine Quinte; ein Gesetz, das von Sondhaus beobachtet und von Helmholtz theoretisch für den Fall bewiesen wurde, wo die Verbindungscanäle aus einfachen Löchern in den unendlich dünnen Seiten des Reservoirs bestehen.

305. Die Untersuchung der Leitungsfähigkeit von verschiedenen Arten von Canälen bildet einen sehr wichtigen Theil der Theorie der Resonatoren; doch liegt mit Ausnahme sehr weniger Fälle die genaue Lösung des Problemes stets ausserhalb der Gewalt unserer jetzigen mathematischen Hülfsmittel. Indessen lassen sich doch einige allgemeine Principien, die Licht auf die Frage werfen, aufstellen, und in manchen interessanten Fällen angenäherte Lösungen, welche für praktische Zwecke ausreichen, erhalten.

Wir wissen (§§. 79, 242), dass die Energie eines Fluidums, das durch einen Canal fliesst, nicht grösser sein kann, wie die irgend einer fingirten Bewegung, welche denselben Gesammt-

strom liefert. Folglich wird, wenn man den Canal in irgend einer Weise verengt oder irgend ein Hinderniss einführt, die Leitungsfähigkeit hierdurch verringert, weil die Aenderung von der Art eines hinzutretenden Zwanges ist. Vor der Aenderung konnte das Fluidum frei die schliessliche Strömungsvertheilung annehmen. In Fällen, in denen eine strenge Lösung sich nicht erreichen lässt, können wir die Minimumeigenschaft benutzen, um eine untere Grenze für die Leitungsfähigkeit aufzustellen; die aus dem hypothetischen Strömungsgesetze abgeleitete Energie kann nie geringer wie die wirklich vorhandene sein und muss dieselbe übertreffen, wenn nicht die hypothetische und die wirkliche Bewegung zusammenfallen.

Ein anderes allgemeines Princip, welches häufig von Nutzen ist, lässt sich zweckmässiger in der Sprache der Elektricität aussprechen. Die Grösse, mit welcher wir zu thun haben, ist die Leitungsfähigkeit eines gewissen Leiters, der aus einer Materie von der specifischen Leitungsfähigkeit Eins besteht. Das Princip ist das, dass bei jeder Vergrösserung der Leitungsfähigkeit irgend eines Theiles des Leiters auch die Leitungsfähigkeit des Ganzen wächst, und dass letztere sich verringert, sowie sich die Leitungsfähigkeit irgend eines Theiles verringert; ausgenommen sind nur gewisse, sehr specielle Fälle, wo keine Aenderung eintritt. Bei dem Durchgange durch einen Leiter vertheilt sich die Elektricität so, dass die zerstreute Energie für einen gegebenen Gesammtstrom die kleinstmögliche ist (§. 82). Wenn nun der specifische Widerstand irgend eines Theiles vermindert wird, so wird die gesammte Zerstreuung geringer sein wie vorher, selbst wenn die Vertheilung der Ströme ungeändert bleibt. A fortiori ist dieses also der Fall, wenn die Ströme sich von Neuem so vertheilen, dass dadurch die Zerstreuung zu einem Minimum gemacht wird. Macht man eine unendlich dünne Lamelle von Materie, welche sich quer durch den Canal erstreckt, vollkommen leitend, so vermindert sich der Widerstand des Ganzen, wenn nicht die Lamelle mit einer der ungestörten Flächen von gleichem Potentiale zusammenfällt. In dem eben ausgenommenen Falle wird keine Wirkung erzielt.

306. Unter den verschiedenen Arten von Canälen muss denjenigen eine hervorragende Stelle zuertheilt werden, welche aus einfachen Oeffnungen in unbegrenzten ebenen Wänden von unendlich kleiner Dicke bestehen. Für die praktischen Anwendungen reicht es hin, dass eine Wand sehr dünn im Verhältnisse zu den Dimensionen der Oeffnung und annähernd eben innerhalb einer Entfernung von der Oeffnung ist, die gross beim Vergleich zu denselben Grössen erscheint.

Wegen der Symmetrie auf den beiden Seiten der Wand muss die Bewegung des Fluidums in der Ebene der Oeffnung normal und daher das Geschwindigkeitspotential constant sein; auf dem übrigen Theile der Ebene muss die Bewegung ausschliesslich tangential ausfallen, so dass wir zur Bestimmung von φ auf einer Seite der Ebene die folgenden Bedingungen haben, (α) $\varphi =$ Constans in der Oeffnung, (β) $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right) = 0$ auf dem Reste der Ebene der Wand, (γ) $\varphi =$ Constans in unendlich weiten Entfernungen.

Da wir nur mit den Differenzen von φ zu thun haben, so können wir annehmen, dass φ im Unendlichen verschwindet. Man wird sehen, dass die Bedingungen (β) und (γ) dadurch erfüllt werden, dass man annimmt, φ sei das Potential von anziehender, über die Oeffnung vertheilter, Materie. Das von dem Probleme noch Uebrigbleibende besteht dann darin, die Vertheilung von Materie so zu bestimmen, dass ihr Potential über derselben Fläche constant ist. Das Problem ist mathematisch dasselbe, wie das: die Vertheilung der Elektricität auf einer geladenen leitenden Platte zu bestimmen, die im offenen Raume liegt, und deren Gestalt die der Oeffnung ist, mit welcher wir zu thun haben. Die Leitungsfähigkeit der Oeffnung lässt sich in Werthen der Capacität der Platte des statischen Problemes bestimmen. Bezeichnet φ das constante Potential in der Oeffnung, so wird der elektrische Widerstand (für eine Seite allein) betragen:

$$\varphi_1 : \iint \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma,$$

wobei sich die Integration über die Fläche der Oeffnung erstreckt.

Nun ist $\int\int \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = 2\pi \times$ (der ganzen Menge der vertheilten Materie); daher beträgt, wenn M die Capacität oder die dem Potentiale Eins entsprechende Ladung bedeutet, der ganze Widerstand $(\pi M)^{-1}$. Wir haben demgemäss für die Leitungsfähigkeit, welche der reciproke Werth des Widerstandes ist:

$$c = \pi M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

So weit ich weiss, ist die Ellipse die einzige Gestalt der Oeffnung, für welche c oder M theoretisch bestimmt werden kann[1]); in diesem Falle ist das Resultat in der bekannten Lösung des Problemes der Bestimmung einer Vertheilung der Elektricität auf einem ellipsoidischen Conductor enthalten. Aus der Thatsache, dass eine von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzte Schale keine Kraft auf einen Punkt im Inneren ausübt, lässt sich leicht erkennen, dass die Oberflächendichtigkeit, welche irgend einem Punkte eines Ellipsoides gegeben werden muss, um ein constantes Potential zu erhalten, proportional dem Lothe (p) ist, das von dem Mittelpunkte auf die Tangentenebene in dem fraglichen Punkte gefällt wird. Bedeutet daher ϱ die Dichtigkeit, so ist $\varrho = \varkappa p$; die ganze Menge von Materie wird gegeben durch:

$$Q = \int\int \varrho\, dS = \varkappa \int\int p\, dS = 4\pi\varkappa abc \ldots (2)^{2)},$$

so dass:

$$\varrho = \frac{Qp}{4\pi abc} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise ist:

$$p = 1 : \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

---

[1]) Der Fall eines Resonators mit einer elliptischen Oeffnung wurde von Helmholtz behandelt (Crelle, Bd. 57, 1860), dessen Resultat mit (8) äquivalent ist.

[2]) $2c$ ist für den Augenblick hier die dritte Hauptaxe des Ellipsoides.

oder, da:

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

$$p = c : \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2 x^2}{a^4} + \frac{c^2 y^2}{b^4}}.$$

Nehmen wir nun an, dass c unendlich klein ist, so erhalten wir den speciellen Fall einer elliptischen Platte; unterscheiden wir weiter nicht länger zwischen den beiden Oberflächen, so wird:

$$\varrho = \frac{Q}{2\pi ab} : \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wir haben zunächst den Werth des constanten Potentiales (P) zu finden. Achten wir auf den Werth von P in dem Mittelpunkte der Platte, so sehen wir, dass:

$$P = \int\int \frac{\varrho\, dS}{r} = \int\int \varrho\, dr\, d\vartheta.$$

Integriren wir zunächst mit Bezug auf r, so erhalten wir:

$$\int_0^r \varrho\, dr = Q : 4a\sqrt{(1 - e^2 \cos^2\vartheta)},$$

wo e die Excentricität bedeutet; daher:

$$P = \frac{Q}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(1 - e^2\cos^2\vartheta)}} = \frac{Q}{a} F(e),$$

wo F das Symbol des vollständigen elliptischen Integrales von der ersten Ordnung bezeichnet. Setzen wir $P = 1$, so wird:

$$\frac{c}{\pi} = M = \frac{a}{F(e)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als der schliessliche Ausdruck für die Capacität einer Ellipse, deren halbe grosse Axe a und deren Excentricität e ist. Für den speciellen Fall des Kreises haben wir $e = 0$, $F(e) = \frac{1}{2}\pi$; demnach wird für einen Kreis vom Radius R:

$$c = 2R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Ist die Capacität des Resonators S, so erhalten wir aus (6) §. 304:

$$\lambda = \pi \sqrt{\left(\frac{2S}{R}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Der Flächeninhalt (σ) der Ellipse wird gegeben durch:

$$\sigma = \pi a^2 \sqrt{(1 - e^2)},$$

und daher in Werthen von σ:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)} \cdot \frac{2F(e)(1 - e^2)^{\frac{1}{4}}}{\pi} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Für ein kleines e erhalten wir durch eine der Integration vorhergehende Entwickelung nach Potenzen von e:

$$F(e) = \frac{1}{2}\pi \left\{1 + \frac{1^2}{2^2}e^2 + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2}e^4 + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2}e^6 + \ldots\right\} \ldots (9),$$

woraus:

$$\frac{2F(e)(1 - e^2)^{\frac{1}{4}}}{\pi} = 1 - \frac{e^4}{64} - \frac{e^6}{64} + \ldots$$

Bei Vernachlässigung von e^8 und der höheren Potenzen erhält man demnach:

$$c = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)} \cdot \left(1 + \frac{e^4}{64} + \frac{e^6}{64} + \ldots\right) \ldots (10).$$

Aus diesem Resultate erkennen wir, dass die Leitungsfähigkeit einer elliptischen Oeffnung bei kleiner Excentricität nahezu dieselbe wie die einer kreisförmigen Oeffnung von gleichem Flächeninhalte ist. Unter den verschiedenen Formen der Oeffnung von gegebenem Flächeninhalte muss eine sein, für welche die Leitungsfähigkeit ein Minimum beträgt; wenn auch ein formeller Beweis schwierig sein möchte, so ist es leicht einzusehen, dass dieses keine andere wie der Kreis sein kann. Eine untere Grenze für den Werth von c wird daher immer durch die Leitungsfähigkeit des Kreises von gleichem Flächeninhalte, das ist durch $2\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}$ gegeben; wenn die wirkliche Gestalt nahezu kreisförmig ist, so kann diese Grenze als eine enge Annäherung an den wahren Werth genommen werden.

Der Werth von λ wird dann gegeben durch:

$$\lambda = 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{5}{4}} \sigma^{-\frac{1}{4}} S^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Um zu zeigen, wie wenig der Werth von c durch eine mässig grosse Excentricität beeinflusst wird, habe ich die folgende kleine Tabelle mit Hülfe der Legendre'schen Werthe von $F(e)$ berechnet. Setzen wir $e = \sin\psi$, so haben wir in $\cos\psi$ das Verhältniss der Axen, und für die Leitungsfähigkeit:

$$c = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{(\cos\psi)} \cdot F(\sin\psi)}.$$

ψ	$e = \sin\psi$	$b : a = \cos\psi$	$\pi : 2F(e)\,(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$
0^0	0,00000	1,00000	1,0000
20^0	0,34204	0,93969	1,0002
30^0	0,50000	0,86603	1,0013
40^0	0,64279	0,76604	1,0044
50^0	0,76604	0,64279	1,0122
60^0	0,86603	0,50000	1,0301
70^0	0,93969	0,34202	1,0724
80^0	0,98481	0,17365	1,1954
90^0	1,00000	0,00000	∞

Der in der vierten Columne gegebene Werth des letzten Factors ist das Verhältniss zwischen der Leitungsfähigkeit der Ellipse zu dem eines Kreises von gleichem Flächeninhalte. Es geht aus der Tabelle hervor, dass selbst in dem Falle, wo die Excentricität der Ellipse so gross, dass das Verhältniss der Axen 2 : 1 beträgt, die Leitungsfähigkeit nur um 3 Procent vergrössert wird; das würde einer Aenderung von wenig mehr wie ein Komma (§. 18) in der Tonhöhe des Resonators entsprechen. Es scheint kein Grund zur Annahme vorhanden zu sein, dass diese angenäherte Unabhängigkeit von der Gestalt eine nur der Ellipse eigenthümliche Eigenschaft ist; wir dürfen mit einiger Zuversicht schliessen, dass für jede

mässig verlängerte, ovale Oeffnung die Leitungsfähigkeit mit einem beträchtlichen Grade von Genauigkeit nur aus dem Flächeninhalte allein berechnet werden kann.

Ist der Flächeninhalt gegeben, so existirt keine obere Grenze für c. Nehmen wir nämlich einmal an, dass der Flächeninhalt σ über n gleiche Kreise, die weit genug von einander liegen, um unabhängig von einander zu wirken, vertheilt sei. Der Flächeninhalt eines jeden Kreises ist $n^{-1}\sigma$, seine Leitungsfähigkeit beträgt $2(n\pi)^{-\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{1}{2}}$. Die ganze Leitungsfähigkeit ist $n$mal so gross und wächst daher unendlich mit n. Als allgemeine Regel kann gelten, dass, je mehr die Oeffnung verlängert oder erweitert wird, desto grösser die Leitungsfähigkeit für einen gegebenen Flächeninhalt ist.

Um eine obere Grenze für die Leitungsfähigkeit einer gegebenen Oeffnung zu finden, können wir das Princip benutzen, dass jede Vergrösserung der Oeffnung von einem Anwachsen des Werthes von c begleitet ist. Für ein Quadrat kann man daher sicher sein, dass c hierfür kleiner ist, wie für den umschriebenen Kreis; wir sahen ferner schon, dass c hier grösser wie für den Kreis von gleichem Flächeninhalte sein muss. Ist b die Seite des Quadrates, so folgt also:

$$\frac{2b}{\sqrt{\pi}} < c < \sqrt{2}b.$$

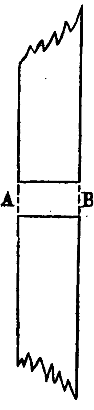
Die Töne eines Resonators mit quadratischer Oeffnung, welche aus diesen beiden Grenzen berechnet werden, differiren um ungefähr einen ganzen Ton. Der tiefere dieser beiden wird zweifellos dem wirklichen Tone näher liegen als der höhere. Dieses Beispiel zeigt, dass wir selbst, wenn die Rechnung uns eine Lösung im mathematischen Sinne zu geben versagt, in Betreff der Grösse der Grössen, mit denen wir zu thun haben, nicht ganz im Dunkeln zu bleiben brauchen.

Für ähnliche Oeffnungen oder Systeme von Oeffnungen ändert sich c wie die Lineardimension.

307. Die meisten Resonatoren, welche im praktischen Gebrauche sind, haben Hälse von grösserer oder geringerer

Länge; selbst wenn nichts vorhanden wäre, was man einen Hals nennen würde, könnte doch die Dicke der Wand des Gefässes nicht immer vernachlässigt werden. Wir wollen daher die Leitungsfähigkeit eines Canales untersuchen, der von einer cylindrischen Durchbohrung durch eine sperrende Platte mit parallelen Grenzebenen gebildet wird; wenn wir auch das Problem nicht strenge zu lösen vermögen, so werden wir doch für die meisten praktischen Zwecke genügende Belehrung erreichen. Die Dicke der Platte werde L genannt, der Radius des cylindrischen Canales R.

Fig. 59.



Welches auch der Widerstand des Canales sein mag, derselbe wird durch Einführung von unendlich dünnen Scheiben von vollkommener Leitungsfähigkeit bei A und B verringert (Fig. 59). Die Wirkung der Scheiben ist die: constante Potentiale auf ihren Oberflächen hervorzurufen; das so modificirte Problem lässt eine strenge Lösung zu. Ausserhalb A und B ist die Bewegung dieselbe wie die vorher untersuchte, wenn die sperrende Platte unendlich dünn ist. Zwischen A und B ist der Strom gleichförmig. Der Widerstand beträgt daher im Ganzen:

$$\frac{1}{2R} + \frac{L}{\pi R^2},$$

woraus:

$$c = \frac{\pi R^2}{L + \frac{1}{2}\pi R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Bezeichnet α die Correction, welche zu L wegen eines offenen Endes hinzugefügt werden muss, so haben wir:

$$\alpha = \frac{1}{4}\pi R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Diese Correction ist im Allgemeinen zu klein, um sich bemerkbar zu machen; wenn aber L sehr klein im Verhältnisse zu R ist, fällt die angenommene Bewegung immer näher mit der wirklichen Bewegung zusammen, und daher nähert sich der Werth von α in (2) immer mehr dem wahren Werthe.

Eine obere Grenze für den Widerstand lässt sich aus einer hypothetischen Bewegung des Fluidums berechnen. Zu diesem Zwecke wollen wir annehmen, dass bei A und B unendlich dünne Kolben eingeführt werden, deren Wirkung die ist: die Normalgeschwindigkeit an diesen Orten constant zu machen. Innerhalb der Röhre wird die Strömung wie vorher gleichförmig sein; für den äusseren Raum haben wir aber ein neues Problem ins Auge zu fassen, nämlich folgendes: Die Bewegung eines Fluidums zu bestimmen, das durch eine unendliche Ebene begrenzt ist, und bei welchem die Normalgeschwindigkeit auf einer kreisförmigen Fläche einen gegebenen constanten Werth hat, auf dem übrigen Theile der Ebene aber Null ist.

Man kann das Potential noch so auffassen, als rühre es von einer über die Scheibe vertheilten Materie her, indessen ist dasselbe auf der Fläche nicht länger constant; die Dichtigkeit aber der Materie, welche proportional $\frac{d\varphi}{dn}$, ist constant.

Die kinetische Energie der Bewegung lautet:

$$=\frac{1}{2}\int\int\varphi\,\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma=\frac{1}{2}\,\frac{d\varphi}{dn}\int\int\varphi\,d\sigma,$$

wobei sich die Integration über die Fläche des Kreises erstreckt.

Der Gesammtstrom durch die Ebene beträgt:

$$=\int\int\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma=\pi R^2\,\frac{d\varphi}{dn}.$$

Daher:

$$\frac{2\text{ kinetische Energie}}{(\text{Strom})^2}=\frac{\int\int\varphi\,d\sigma}{\pi^2 R^4\,\frac{d\varphi}{dn}}.$$

Hat die Materie die Dichtigkeit Eins, so ist $\frac{d\varphi}{dn}=2\pi$; das gesuchte Verhältniss wird ausgedrückt durch $\frac{P}{\pi^3 R^4}$, wo P das Potential einer kreisförmigen Schicht von Materie von der Dichte Eins und dem Radius R auf sich selbst bedeutet.

Die einfachste Methode, P zu berechnen, beruht auf der Bemerkung, dass P die Arbeit darstellt, welche nothwendig ist, um die Scheibe in unendlich kleine Elemente zu zerbrechen, und die einzelnen Elemente aus ihrem gegenseitigen Einflusse zu entfernen[1]). Nehmen wir Polarcoordinaten (ϱ, ϑ), wobei der Pol an der Kante der Scheibe liegt, deren Radius a ist, so haben wir für das Potential im Pole, $V = \int\int d\vartheta\, d\varrho$; die Grenzen von ϱ sind 0 und $2\,a\cos\vartheta$, die von ϑ aber $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$.

Daher:

$$V = 4\,a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Wir wollen nun einen Streifen mit der Breite da von der Kante der Scheibe abschneiden. Die Arbeit, welche dazu gebraucht wird, diesen Streifen in eine unendliche Entfernung zu bringen, ist $2\pi a\,da\,.\,4\,a$. Schälen wir so allmälig die Scheibe ab, bis nichts mehr übrig bleibt, und bringen alle abgeschälten Theile unendlich weit, so finden wir für die Gesammtarbeit durch Integration mit Bezug auf a von 0 bis R:

$$P = \frac{8\,\pi R^3}{3}\text{[2]}).$$

Die Grenze für den Widerstand (auf der einen Seite) ist daher $\frac{8}{3\,\pi^2 R}$; wir schliessen hieraus, dass der Widerstand des ganzen Canales geringer ist wie:

$$\frac{L}{\pi R^2} + \frac{16}{3\,\pi^2 R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Ueberblicken wir noch einmal unsere Resultate, so sehen wir, dass:

---

[1]) Ein Theil des §. 302 ist hier wiederholt für Diejenigen, welche die Schwierigkeiten der vollständigeren Untersuchung zu vermeiden wünschen.

[2]) Diese Methode, P zu berechnen, wurde dem Autor vom Professor **Clerk Maxwell** angegeben.

$$\frac{\pi}{4} R < \alpha < \frac{8}{3\pi} R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

oder in Decimalstellen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > 0{,}785\, R \\ \alpha < 0{,}849\, R \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Man muss darauf achten, dass α hier die Correction für ein Ende bedeutet. Der ganze Widerstand entspricht der Länge $L + 2\alpha$ einer Röhre mit dem Querschnitt πR^2.

Ist L im Vergleich zu R sehr gross, so dürfen wir einfach setzen:

$$c = \frac{\pi R^2}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

In diesem Falle haben wir aus (6), §. 304:

$$\lambda = \frac{2\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{(SL)}}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Die Correction für ein offenes Ende (α) ist eine Function von L, der Art, dass sie für $L = 0$ mit der unteren Grenze, das ist $\frac{1}{4}\,\pi R$, zusammenfällt. Wenn L wächst, wächst auch α mit L; indessen erreicht α, selbst wenn L unendlich gross wird, nicht die obere Grenze $\frac{8}{3\pi}\,R$. Betrachten wir nämlich die Bewegung, welche in irgend einem mittleren Theile der Röhre erfolgt. Die kinetische Energie ist grösser, als wie diejenige ist, welche nur der Länge des Stückes entsprechen würde. Wenn daher das Stück entfernt und die freien Enden zusammengebracht werden, während die Bewegung sonst wie vorher anhält, so wird die kinetische Energie um mehr, wie es der Länge des weggenommenen Stückes entsprechen würde, vermindert. A fortiori wird dieses für die wirkliche Bewegung, welche in der verkürzten Röhre existirt, richtig sein. Dass α, wenn $L = \infty$, nicht gleich $\frac{8}{3\pi}\,R$ wird, ist evident, weil die Normalgeschwindigkeit am Ende, weit davon entfernt, constant zu sein, wie bei der Berechnung dieses Resultates angenommen

wurde, von dem Mittelpunkte nach aussen zunehmen und an der Kante unendlich werden muss.

Eine weitere Annäherung für den Werth von α kann erhalten werden, indem man eine veränderliche Geschwindigkeit in der Ebene der Mündung annimmt. Die Berechnung findet sich im Anhange *A*. Es ergiebt sich daraus, dass für eine unendlich lange Röhre α nicht so gross wie 0,82422 R sein kann. Der wirkliche Werth von α liegt wahrscheinlich nicht weit von 0,82 R.

308. Ausser dem Cylinder giebt es sehr wenige Formen von Canälen, deren Leitungsfähigkeit mathematisch bestimmt werden kann. Ist indessen die Form annähernd cylindrisch, so können wir Grenzen erhalten, welche nützlich sind, weil sie uns in den Stand setzen, die Wirkung von solchen Abweichungen von der mathematischen Genauigkeit abzuschätzen, wie dieselben meist in der Praxis eintreten.

Eine untere Grenze für den Widerstand irgend eines verlängerten und annähernd geraden Cylinders kann man unmittelbar dadurch erhalten, dass man eine unendliche Zahl von imaginären, ebenen, vollkommen leitenden Schichten, die senkrecht zur Axe stehen, einführt. Bezeichnet σ den Flächeninhalt des Querschnittes in irgend einem Punkte x, so ist der Widerstand zwischen zwei Schichten in der Entfernung dx von einander gleich $\sigma^{-1} dx$; daher ist der ganze wahre Widerstand sicherlich grösser wie:

$$\int \sigma^{-1} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wenn nicht der Conductor wirklich cylindrisch ist.

Um eine obere Grenze zu finden, können wir die kinetische Energie des Stromes unter der Hypothese berechnen, dass die Geschwindigkeit parallel der Axe über jeden Querschnitt gleichförmig ist. Diese hypothetische Bewegung ist die, welche eintreten würde, wenn man eine unendliche Anzahl von starren sich frei bewegenden Kolben einführen würde; das berechnete Resultat fällt nothwendiger Weise grösser wie die Wirklichkeit aus, wenn nicht der Querschnitt absolut constant bleibt.

Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass der Canal symmetrisch zu einer Axe ist, in welchem Falle die Bewegung des Fluidums natürlich ebenfalls symmetrisch sein muss.

Bezeichnet U den Gesammtstrom, so haben wir nach Annahme für die axiale Geschwindigkeit in jedem Punkte x:

$$u = \sigma^{-1} U \quad \ldots \quad (2),$$

woraus die radiale Geschwindigkeit durch die Continuitätsgleichung (6, §. 238) bestimmt wird:

$$\frac{d(ru)}{dx} + \frac{d(rv)}{dr} = 0.$$

Daher:

$$rv = const - \frac{1}{2} U r^2 \frac{d\sigma^{-1}}{dx},$$

oder, da auf der Axe keine Fluidumquelle liegt:

$$v = -\frac{1}{2} U r \frac{d\sigma^{-1}}{dx} \quad \ldots \quad (3).$$

Die kinetische Energie lässt sich jetzt durch einfache Integration berechnen:

$$\int u^2 \sigma \, dx = U^2 \int \sigma^{-1} dx,$$

$$\int \int v^2 \, 2\pi r \, dr \, dx = \frac{\pi U^2}{8} \int y^4 \left(\frac{d\sigma^{-1}}{dx}\right)^2 dx,$$

wenn y der Radius des Canales im Punkte x ist, so dass $\sigma = \pi y^2$.

Daher:

$$\frac{2 \text{ kinetische Energie}}{(\text{Strom})^2} = \int \frac{1}{\pi y^2} \left\{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} dx \quad \ldots \quad (4).$$

Dies ist die Grösse, welche eine obere Grenze für den Widerstand giebt. Das erste Glied, welches der Geschwindigkeitscomponente u entspricht, ist dasselbe, welches vorher für die untere Grenze erhalten wurde, wie sich auch voraussehen liess. Der Unterschied zwischen den beiden, welcher den grössten Irrthum giebt, den man begeht, wenn einer von demselben als richtiger Werth genommen wird, beträgt:

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \quad \ldots \quad (5).$$

Für einen nahezu cylindrischen Canal ist $\frac{dy}{dx}$ eine kleine Grösse, und es wird mithin das auf diese Weise gefundene Resultat angenähert richtig sein. Es ist nicht nothwendig, dass der Querschnitt annähernd constant ist, sondern nur, dass er sich langsam ändert. Die erfolgreiche Benutzung der angenäherten Rechnung hängt in diesen und ähnlichen Fällen von der Thatsache ab, dass sich die zu bestimmende Grösse in einem Zustande des Minimums befindet. Jede rationelle Annäherung an die wirkliche Bewegung giebt nach den Principien der Differentialrechnung ein der Wahrheit sehr nahe kommendes Resultat.

Mittelst der Eigenschaften des Potentiales und der Strömungsfunctionen lässt das vorliegende Problem eine wirkliche angenäherte Lösung zu. Bezeichnen φ und ψ die Werthe dieser Functionen in irgend einem Punkte x, r; ferner u, v die axiale und transversale Geschwindigkeit, so ist:

$$u = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}, \quad v = \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dx} \quad \ldots (6),$$

woraus durch Elimination:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7),$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Bedeutet F den Werth von φ als eine Function von x, wenn $r = 0$, so lassen sich die allgemeinen Ausdrücke von φ und ψ in Werthen von F mittelst (7) und (8) durch folgende Reihen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= F - \frac{r^2 F''}{2^2} + \frac{r^4 F^{IV}}{2^2 . 4^2} - \frac{r^6 F^{VI}}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \ldots \\ \psi &= \frac{r^2 F'}{2} - \frac{r^4 F'''}{2^2 . 4} + \frac{r^6 F^{V}}{2^2 . 4^2 . 6} - \frac{r^8 F^{VII}}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (9),$$

worin die Accente Differentiationen mit Bezug auf x bezeichnen. An der Begrenzung des Canales, wo $r = y$, ist ψ constant etwa ψ_1. Daraus ergiebt sich:

$$\psi_1 = \frac{y^2 F'}{2} - \frac{y^4 F'''}{2^2 \cdot 4} + \frac{y^6 F^{\mathrm{V}}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als Gleichung, welche y und F verknüpft. Bei dem vorliegenden Probleme ist y gegeben, wir haben F durch dasselbe auszudrücken. Durch successive Annäherung erhalten wir aus (10):

$$F' = \frac{2\psi_1}{y^2} + \frac{y^2}{8}\left\{\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{2\psi_1}{y^2}\right) + \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}y^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{2\psi_1}{y^2}\right)\right\}$$
$$- \frac{y^4}{12 \cdot 4^2}\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{2\psi_1}{y^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Der Gesammtstrom wird durch folgendes Integral gegeben:

$$\int_0^y \frac{d\varphi}{dx} 2\pi r\,dr = \int_0^y \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} 2\pi r\,dr = 2\pi\psi_1;$$

es wird daher der Widerstand zwischen je zwei Flächen von gleichem Potential dargestellt durch:

$$\frac{1}{2\pi\psi_1}\int F'\,dz.$$

Der Ausdruck für den Widerstand lässt bei Benutzung der theilweisen Integration beträchtliche Vereinfachung zu für den Fall, wo der Canal in der Nachbarschaft der Integrationsgrenzen wirklich cylindrisch ist. Auf solche Weise finden wir als Endresultat:

$$\text{Widerstand} = \int \frac{dx}{\pi y^2}\left\{1 + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{(3y'^2 - yy'')^2}{48}\right\} \ldots (12)^{1)},$$

y' und y'' bedeuten die Differentialquotienten von y mit Bezug auf x.

Es geht aus dem Vorigen also hervor, dass die obere Grenze der vorhergehenden Untersuchung thatsächlich bis auf eine Annäherung von der zweiten Ordnung das richtige Resultat darstellt. Sehen wir y als eine Function von ωx an, wo ω eine kleine Grösse bezeichnet, so ist (12) richtig bis auf die Glieder, welche ω^4 enthalten.

---

1) Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. VII, Nr. 93.

309. Unsere Kenntniss von den Gesetzen, von welchen die Tonhöhe der Resonatoren abhängt, verdanken wir den Arbeiten verschiedener Experimentatoren und Mathematiker.

Die Beobachtung, dass für ein gegebenes Mundstück die Tonhöhe eines Resonators hauptsächlich von dem Volumen S abhängt, rührt von Liscovius her, welcher fand, dass die Tonhöhe einer theilweise mit Wasser gefüllten Flasche durch Neigung der Flasche nicht geändert würde. Sondhaus[1]) bestätigte dieses Resultat. Der letztere Beobachter fand weiter, dass bei Resonatoren ohne Hälse der Einfluss der Oeffnung hauptsächlich von deren Flächeninhalte abhängt, obschon, wenn die Gestalt sehr verlängert war, eine gewisse Erhöhung der Tonhöhe eintrat. Er gab folgende Formel an:

$$N = 52400 \frac{\sigma^{\frac{1}{4}}}{S^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

die Längeneinheit ist hier das Millimeter.

Die Theorie dieser Art von Resonatoren verdanken wir Helmholtz[2]), dessen Formel lautet:

$$N = \frac{a\,\sigma^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}\,\pi^{\frac{5}{4}}\,S^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2);$$

dieselbe ist auf kreisförmige Oeffnungen anwendbar.

Für Flaschen mit langen Hälsen lautet die Sondhaus'sche[3]) Formel:

$$N = 46705 \frac{\sigma^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}\,S^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

entsprechend der theoretischen:

$$N = \frac{a}{2\pi} \frac{\sigma^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}\,S^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

---

[1]) Ueber den Brummkreisel und das Schwingungsgesetz der cubischen Pfeifen. Pogg. Ann. LXXXI.

[2]) Crelle, Bd. LVII, 1 bis 72. 1860.

[3]) Ueber die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite. Pogg. Ann. LXXIX. 1850.

In der Praxis tritt es nicht oft ein, dass entweder der Hals so lang ist, dass die Correction für das offene Ende vernachlässigt werden kann, wie Gleichung (4) voraussetzt, oder dass auf der andern Seite derselbe so kurz ausfällt, dass er selbst vernachlässigt werden darf, wie in (2) vorausgesetzt wird. Wertheim[1]) zeigte zuerst, dass die Wirkung eines offenen Endes sich durch einen Zuwachs (α) zu der Länge darstellen lässt, die unabhängig, oder wenigstens nahezu unabhängig von L und λ ist.

Die angenäherte theoretische Bestimmung von α rührt von Helmholtz her, welcher $\frac{1}{4}\pi R$ als Correction für ein offenes Ende, das mit einem unendlich grossen seitlichen Rande versehen ist, angab. Seine Methode bestand darin, Gestalten von Röhren aufzusuchen, für welche das Problem lösbar war, und dann diejenigen auszusuchen, welche am meisten mit einem Cylinder übereinstimmten. Die Correction $\frac{1}{4}\pi R$ ist mit aller Strenge anwendbar auf eine Röhre, deren Radius an dem offenen Ende und in einer grossen Entfernung von demselben R ist, welche sich aber in der Nachbarschaft des offenen Endes ein wenig erweitert.

Aus der Thatsache, dass sich der Fall des wirklichen Cylinders durch Einführung eines Hindernisses ableiten lässt, dürfen wir schliessen, dass das Resultat zu klein ist.

Es ist merkwürdig, dass die in diesem Buche befolgte Ableitung, welche zuerst in der Arbeit über Resonanz gegeben wurde, genau zu demselben Resultat führte, obgleich man sich wohl kaum zwei ungleichere Methoden ausdenken kann.

Die an der Länge anzubringende Correction wird einigermaassen von der Thatsache abhängen, ob der Luftstrom frei aus dem offenen Ende austreten kann oder nicht. Erstreckt sich der Hals in den offenen Raum, so ist weniger Hemmniss vorhanden, als wenn das rückwärts Abfliessen des Stromes

---

[1]) Mémoire sur les Vibrations sonores de l'air. Ann. de Chim. (3) XXXI.

durch einen seitlichen Rand verhindert wird, wie bei unserer angenäherten Berechnung vorausgesetzt wurde. Indessen ist die auf diese Weise eingeführte Unsicherheit nicht sehr bedeutend; wir können im Allgemeinen $\alpha = \frac{1}{4} \pi R$ als eine hinreichende Annäherung nehmen. In Praxis stimmt, wenn die Hälse kurz sind, die Hypothese des seitlichen Randes sehr gut mit der Wirklichkeit; sind dagegen die Hälse lang, so ist die Correction selbst von untergeordneter Bedeutung.

Die allgemeine Formel wird dann, wenn σ den Flächeninhalt des Querschnitts des Halses bedeutet, werden:

$$N = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{S\left(L + \frac{1}{2}\sqrt{\pi\sigma}\right)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

oder in Zahlen:

$$N = \frac{a}{6{,}2832} \frac{\sigma^{1/2}}{S^{1/2}\sqrt{(L + 0{,}8863\sqrt{\sigma})}} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Sondhaus[1]) fasste die Resultate seiner Messungen in eine Formel zusammen, welche von der vorstehenden nicht viel abweicht; dieser Forscher sprach zu derselben Zeit seine Ueberzeugung aus, dass die betreffende Form nicht mehr eine empirische Interpolationsformel, sondern der Ausdruck des Naturgesetzes sei. Die Theorie der Resonatoren mit Hälsen wurde etwa zu derselben Zeit gegeben in einer Arbeit: „Ueber Resonanz", veröffentlicht in den Philosophical Transactions für 1871[2]); aus dieser letzteren ist das Meiste auf den letzten Seiten genommen.

310. Die einfache Methode der Berechnung der Tonhöhe eines Resonators, mit welcher wir bis jetzt beschäftigt waren, lässt sich nur auf die tiefste Schwingungsart, deren Charakter vollkommen bestimmt ist, anwenden. Die Obertöne von Resonatoren mit verkürzten Hälsen fallen relativ sehr hoch aus,

[1]) Pogg. Ann. CXL, 53, 219, 1870.

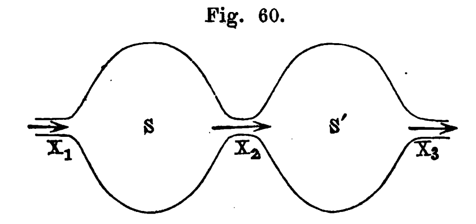
[2]) Proceedings of the Royal Society Nr. 24, 1870.

die entsprechenden Schwingungsarten sind keineswegs von der Trägheit der Luft in dem Inneren des Reservoirs unabhängig. Der Charakter dieser Schwingungsarten wird deutlicher hervortreten, wenn wir zur Betrachtung der Luftschwingungen in einem vollständig geschlossenen Gefässe, wie etwa in einer Kugel, kommen; doch wird es selten glücken, die Tonhöhe theoretisch berechnen zu können.

Indessen giebt es Fälle mehrfacher Resonanz, auf welche unsere Theorie sich anwenden lässt. Diese treten ein, wenn zwei oder mehrere Gefässe durch Canäle mit einander und mit der äusseren Luft in Verbindung stehen; sie werden leicht nach der Lagrange'schen Methode behandelt, vorausgesetzt natürlich, dass die Wellenlänge der Schwingung im Vergleich zu den Dimensionen des Gefässes hinreichend gross ist.

Nehmen wir an, dass zwei Reservoire S, S' mit einander und mit der äusseren Luft durch enge Durchgänge oder Hälse

Fig. 60.



in Verbindung stehen. Wollten wir SS' als ein einziges Reservoir ansehen und unsere vorhergehenden Formeln anwenden, so würden wir zu einem falschen Resultate geführt werden. Diese Formel wurde nämlich unter der Voraussetzung gefunden, dass die Trägheit der Luft innerhalb des Reservoirs ausser Rechnung gelassen werden konnte, aus welcher Bedingung sich klar ergiebt, dass die Energie der Bewegung durch den verbindenden Durchgang ebenso gross als durch die beiden anderen sein muss. Indessen erschöpft eine Untersuchung nach demselben allgemeinen Plan wie vorher den Fall vollkommen. Bezeichnen wir mit X_1, X_2, X_3 den Gesammttransport an Fluidum durch die drei Durchgänge, so haben wir wie in (2) §. 304 als Ausdruck für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\varrho\left\{\frac{\dot{X}_1^2}{c_1} + \frac{\dot{X}_2^2}{c_2} + \frac{\dot{X}_3^2}{c_3}\right\} - \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

und für die potentielle Energie:

$$V = \frac{1}{2}\varrho a^2\left\{\frac{(X_2 - X_1)^2}{S} + \frac{(X_3 - X_2)^2}{S}\right\}. \; . \quad (2).$$

Eine Anwendung der Lagrange'schen Methode giebt für die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\ddot{X}_1}{c} + a^2\frac{X_1 - X_2}{S} &= 0 \\ \frac{\ddot{X}_2}{c_2} + a^2\left\{\frac{X_2 - X_1}{S} + \frac{X_2 - X_3}{S'}\right\} &= 0 \\ \frac{\ddot{X}_3}{c_3} + a^2\frac{X_3 - X_1}{S'} &= 0 \end{aligned}\right\} . \; . \; . \quad (3).$$

Durch Addition und Integration folgt:

$$\frac{X_1}{c_1} + \frac{X_2}{c_2} + \frac{X_3}{c_3} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Daraus nach Elimination von X_2:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{X}_1 + \frac{a^2}{S}\left\{(c_1 + c_2)\,X_1 + \frac{c_1 c_2}{c_3}\,X_3\right\} &= 0 \\ \ddot{X}_2 + \frac{a^2}{S'}\left\{(c_3 + c_2)\,X_3 + \frac{c_3 c_2}{c_1}\,X_1\right\} &= 0 \end{aligned}\right\} . \; . \; . \quad (5).$$

Nehmen wir $X_1 = Ae^{pt}$, $X_3 = Be^{pt}$, so erhalten wir nach Einsetzung dieser Werthe und Bestimmung von $A : B$,

$$p^4 + p^2 a^2\left\{\frac{c_1 + c_2}{S} + \frac{c_3 + c_2}{S'}\right\}$$
$$+ \frac{a^4}{S S'}\left\{c_1 c_3 + c_2\,(c_1 + c_3)\right\} = 0 \quad . \; . \; . \quad (6)$$

als Bestimmungsgleichung für die natürlichen Töne. Bezeichnet N die Schwingungszahl, so ist $N^2 = -\frac{p^2}{4\pi^2}$, wo die beiden Werthe von p^2 natürlich reell und negativ sind. Die Formel vereinfacht sich beträchtlich, wenn $c_3 = c_1$, $S' = S$; indessen wird es lehrreicher sein, diesen Fall von Anfang an zu behandeln. Es sei $c_1 = c_3 = mc_2 = mc$.

Die Differentialgleichungen nehmen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{X}_1 + \frac{a^2 c}{S}\{(1+m) X_1 + X_3\} = 0\\ \ddot{X}_3 + \frac{a^2 c}{S}\{(1+m) X_3 + X_1\} = 0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (7),$$

während nach (4) $X_2 = -\frac{X_1 + X_3}{m}$.

Daher:

$$\left.\begin{aligned}(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_3) + \frac{a^2 c}{S}(m+2)(X_1 + X_3) = 0\\ (\ddot{X}_1 - \ddot{X}_3) + \frac{a^2 c}{S} m (X_1 - X_3) = 0\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (8).$$

Die ganze Bewegung lässt sich in zwei Theile theilen. Für den ersten dieser ist:

$$X_1 + X_3 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

welches erfordert, dass $X_2 = 0$. Diese Bewegung ist demnach dieselbe, welche stattgefunden hätte, wenn die Verbindung zwischen S und S' aufgehoben wäre; die Schwingungszahl wird gegeben durch

$$N^2 = \frac{a^2 c_1}{4\pi^2 S} = \frac{a^2 mc}{4\pi^2 S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Die Dichtigkeit der Luft ist in beiden Reservoiren dieselbe.

Für den zweiten Theil der Bewegung ist $X_1 - X_3 = 0$, so dass:

$$X_2 = -\frac{2X_1}{m}; \quad N'^2 = \frac{a^2(m+2)c}{4\pi^2 S} \quad . \; . \; . \quad (11).$$

Die Schwingungen haben somit entgegengesetzte Phasen. Das Verhältniss der Schwingungszahlen wird gegeben durch $N'^2 : N^2 = m + 2 : m$, ein Zeichen, dass die zweite Schwingungsart die kürzere Periode besitzt. Bei dieser Schwingungsart wirkt die Verbindungsröhre für beide Gefässe wie eine zweite Oeffnung und erhöht daher den Ton. Ist der Durchgang verengt, so fällt der Unterschied zwischen den beiden Klängen kleiner aus.

Ein specieller Fall der allgemeinen Formel, welcher erwähnenswerth ist, wird erhalten, indem man $c_3 = 0$ setzt; es kommt dieses der Unterdrückung einer der Verbindungen mit der äusseren Luft gleich. Wir erhalten so:

$$p^4 + a^2 p^2 \left(\frac{c_1 + c_2}{S} + \frac{c_2}{S'}\right) + \frac{a^4 c_1 c_2}{S S'} = 0 \quad \ldots (12),$$

oder, wenn $S = S'$, $c_1 = m c_2 = m c$,

$$p^4 + a^2 p^2 \frac{(m + 2)\, c}{S} + \frac{a^4 m c^2}{S^2} = 0 \quad \ldots (13),$$

woraus:

$$N^2 = \frac{a^2 c}{8 \pi^2 S} \{m + 2 \pm \sqrt{(m^2 + 4)}\} \quad \ldots (14).$$

Nehmen wir weiter an $m = 1$ oder $c_2 = c_1$, so ist:

$$N^2 = \frac{a^2 c}{8 \pi^2 S} (3 \pm \sqrt{5}).$$

Bedeutet N' die Schwingungszahl für einen einfachen Resonator (S, c), so haben wir:

$$N'^2 = \frac{a^2 c}{4 \pi^2 S},$$

und daher:

$$N_1^2 : N'^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2{,}618,$$

$$N'^2 : N_2^2 = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = 2{,}618.$$

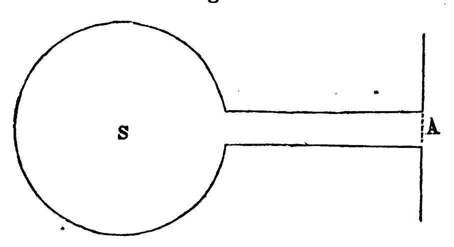
Es geht hieraus hervor, dass das Intervall von N nach N' dasselbe wie das von N' zu N_2, nämlich $\sqrt{2{,}618} = 1{,}618$ ist, oder etwas mehr wie eine Quinte. Man findet, dass, welches auch der Werth von m sein mag, das Intervall zwischen den beiden Tönen nicht kleiner wie 2,414 sein kann, und das stellt ungefähr eine Octave und kleine Terz dar. Der entsprechende Werth von m ist 2.

Eine gleiche Methode lässt sich auf jede Verbindung, wie complicirt dieselbe auch sein mag, von Reservoiren und Verbindungsdurchgängen derselben anwenden, mit der einzigen Einschränkung in Bezug auf die verhältnissmässigen Grössen der Re-

servoire und Wellenlängen; das eben gegebene Beispiel reicht aber hin, die Theorie von vielfachen Resonatoren zu illustriren. Einige wenige Messungen über die Tonhöhe von Doppelresonatoren sind in meiner schon erwähnten Arbeit über Resonanz ausführlicher beschrieben.

311. Die Gleichungen, welche wir bis dahin benutzten, trugen einem Entweichen von Energie aus dem Resonator keine Rechnung. Wenn wirklich keine Uebertragung von Energie zwischen dem Resonator und der äusseren Luft stattfände, so würde die Bewegung isolirt und von geringem praktischen Interesse sein; nichtsdestoweniger besteht das Charakteristische eines Resonators in seiner zum grossen Theile unabhängigen Schwingung. Schwingungen, welche einmal er-

Fig. 61.



regt sind, halten eine beträchtliche Anzahl von Perioden an ohne grossen Verlust an Energie; ihre Schwingungszahl wird von dem Grade der Zerstreuung meist ganz unabhängig sein. Indessen bildet der Grad der Zerstreuung eine wichtige Seite in dem Charakter eines Resonators, von der das Verhalten des letzteren unter gewissen Umständen wesentlich abhängt. Es muss wohl verstanden werden, dass die hier gemeinte Zerstreuung nur das Entweichen von Energie aus dem Gefässe und seiner Nachbarschaft und ihre Diffusion in das umgebende Medium meint, und nicht die Umwandlung von gewöhnlicher Energie in gewöhnliche Wärme. Dieser letzten Transformation tragen unsere Gleichungen keine Rechnung, bis nicht specielle Glieder eingeführt werden, welche die Wirkungen

der Zähigkeit, der Leitung und Strahlung von Wärme darstellen sollen.

In einem früheren Capitel (§. 278) sahen wir, wie die Bewegung auf der rechten Seite des unendlich grossen seitlichen Randes (Fig. 61) in Werthen der Normalgeschwindigkeit des Fluidums auf der Scheibe A ausgedrückt werden kann. Wir fanden §. 278 (3):

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{d\varphi}{dn}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\,d\sigma,$$

worin φ proportional mit e^{int} ist.

Bezeichnet r den Abstand zwischen je zwei Punkten der Scheibe, so ist $\varkappa r$ eine kleine Grösse und angenähert $e^{-i\varkappa r} = 1 - i\varkappa r$.

Daher:

$$\varphi_A = -\frac{1}{2\pi}\left(\int\int\frac{d\varphi}{dn}\frac{d\sigma}{r} - i\varkappa\int\int\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma\right)\ldots(1).$$

Das erste Glied hängt von der Vertheilung des Stromes ab. Nehmen wir an, dass $\frac{d\varphi}{dn}$ constant ist, so erhalten wir schliesslich ein Glied gleich $\frac{8R}{3\pi}$, welches einen Zuwachs an Trägheit oder eine Correction an der Länge darstellt. Dies haben wir schon unter der Annahme eines Kolbens bei A durchgenommen. Das zweite Glied, von welchem die Zerstreuung abhängt, bleibt unabhängig von der Vertheilung des Stromes, da es nur eine Function des Gesammtstromes (X) allein ist. Beschränken wir unsere Aufmerksamkeit auf dieses Glied, so haben wir:

$$\varphi_A = \frac{i\varkappa\dot{X}}{2\pi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Nehmen wir nun an, dass $\varphi \propto e^{int}$, so ergiebt sich für den Theil der Druckänderung in A, von welchem die Zerstreuung abhängt:

$$\delta p = -\varrho\,\dot{\varphi}_A = -i\varrho n\varphi_A = \frac{\varrho n\varkappa\dot{X}}{2\pi} = \frac{\varrho n^2\dot{X}}{2\pi a}\ldots(3).$$

Die diesem entsprechende, während der Uebertragung des Fluidums δX geleistete Arbeit beträgt $\frac{\varrho n^2\dot{X}}{2\pi a}\delta X$; und

da, wie in §. 304, die Ausdrücke für die potentielle und kinetische Energie lauten:

$$V = \frac{1}{2}\varrho a^2 \frac{X^2}{S}, \quad T = \frac{1}{2}\varrho \frac{\dot{X}^2}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

so wird die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{X} + \frac{n^2 c}{2\pi a}\dot{X} + \frac{a^2 c}{S} X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)^{1)},$$

an Stelle von (3) §. 304. Bei der Veranschlagung von c muss eine Rücksichtnahme auf die Trägheit des Fludiums auf der rechten Seite von A eingeschlossen sein, entsprechend dem in dem Ausdrucke für δp vernachlässigten Gliede.

Gleichung (5) hat die für die freien Schwingungen von dissipativen Systemen mit einem Grade von Freiheit (§. 45) geltende Normalform. Die Amplitude ist proportional $e^{-\frac{n^2 c t}{4\pi a}}$; sie verringert sich nach einer Zeit gleich $\frac{4\pi a}{n^2 c}$ in dem Verhältnisse von $e : 1$. Ist die (durch n bestimmte) Tonhöhe gegeben, so besitzen die Schwingungen die grösste Beständigkeit, wenn c am kleinsten, d. h. wenn der Hals am engsten ist.

Ist S gegeben, so haben wir nach Ersetzung von c durch seinen Ausdruck in Werthen von S und n:

$$\frac{4\pi a}{n^2 c} = \frac{4\pi a^3}{n^4 S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Diese Gleichung zeigt, dass unter diesen Umständen die Dauer der Bewegung mit abnehmendem n ausserordentlich rasch zunimmt.

Bei ähnlichen Resonatoren ist $c \propto n^{-1}$, und dann:

$$\frac{4\pi a}{n^2 c} \propto \frac{1}{n};$$

das zeigt, dass in diesem Falle nach Verlauf derselben Anzahl von Perioden stets derselbe proportionale Verlust an der Am-

[1]) Gleichung (5) ist nur eine angenäherte, in soweit als die zerstreuende Kraft unter der Voraussetzung berechnet wurde, dass die Schwingung permanent sei; dies führt aber zu keinem materiellen Irrthum, wenn die Zerstreuung klein ist.

plitude erfolgt. Dieses Resultat lässt sich auch nach der Methode der Dimensionen als eine Folge des Principes der dynamischen Gleichheit ableiten.

Als Beispiel zu (5) möchte ich den Fall einer Kugel mit einem Halse erwähnen, die zur Verbrennung von Phosphor in Sauerstoff bestimmt war und deren Inhalt 0,251 Cubikfuss betrug. Es ergab sich beim Versuche, dass der Klang bei der Maximalresonanz 120 Schwingungen in der Secunde machte, so dass: $n = 120 \,.\, 2\pi$. Nehmen wir die Geschwindigkeit des Schalles (a) zu 1120 Fuss per Secunde, so finden wir aus diesen Angaben:

$$\frac{4\pi a^3}{n^4 S} = \frac{1}{5} \text{ einer Secunde angenähert.}$$

Nach dem beim Anschlagen der Kugel gegebenen Schalle zu urtheilen, glaube ich, dass diese Schätzung zu niedrig sein muss; doch ist zu bemerken, dass die Abwesenheit des in der Theorie angenommenen unendlich grossen seitlichen Randes sehr wesentlich die Grösse der Zerstreuung beeinflussen muss.

Wir wollen nun die erzwungenen Schwingungen untersuchen, welche von einer Schallquelle herrühren, die ausserhalb des Resonators liegt. Wird der von der Quelle herrührende Druck δp an der Mundöffnung des Resonators, — d. h. der unter der Annahme, dass der Mund geschlossen ist, berechnete, — dargestellt durch $Fe^{i\varkappa at}$, so lautet die (5) entsprechende Bewegungsgleichung, welche aber nur auf die erzwungene Schwingung anwendbar ist:

$$\frac{\varrho}{c}\ddot{X} + \frac{\varrho\varkappa^2 a}{2\pi}\dot{X} + \frac{\varrho a^2}{S}X = Fe^{i\varkappa at} \quad . \; . \; . \; (7).$$

Wenn $X = X_0\, e^{i(\varkappa at + \varepsilon)}$, worin X_0 reel ist, so haben wir:

$$\frac{F^2}{\varrho^2 a^4 X_0{}^2} = \left(\frac{1}{S} - \frac{\varkappa^2}{c}\right)^2 + \left(\frac{\varkappa^3}{2\pi}\right)^2.$$

Die Maximaländerung des Druckes (G) innerhalb des Resonators ist mit X_0 verbunden durch die Gleichung:

$$G = \frac{a^2 \varrho X_0}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8),$$

da $X_0 : S$ die Maximalverdichtung darstellt. Daher:

$$\frac{F^2}{G^2} = \left(1 - \frac{\varkappa^2 S}{c}\right)^2 + \left(\frac{\varkappa^3 S}{2\pi}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

das stimmt mit der Gleichung überein, welche Helmholtz für den Fall erhielt, wo die Verbindung mit der äusseren Luft durch eine einfache Oeffnung stattfindet (§. 306). Das vorliegende Problem ist beinahe, aber nicht ganz, ein Fall des in §. 46 behandelten; der Unterschied zwischen beiden beruht nur auf der Thatsache, dass der Zerstreuungscoefficient in (7) selbst eine Function der Periode ist, und nicht eine absolut constante Grösse. Wenn die durch $\varkappa$ bestimmte Periode und S gegeben sind, so zeigt (9), dass die innere Druckänderung (G) ein Maximum hat, wenn $c = \varkappa^2 S$, das ist, wenn der natürliche Klang des Resonators (berechnet ohne Rücksichtnahme auf Zerstreuung) derselbe wie der des die Resonanz hervorrufenden Schalles ist. Die Maximalschwingung ändert sich in dem Falle, wo die Coincidenz der Perioden vollkommen ist, umgekehrt wie S. Indessen reicht in dem Falle, wo S klein ist, eine sehr geringe Ungleichheit in den Perioden hin, eine merkliche Schwächung in der Intensität der Resonanz zu verursachen (§. 49). Bei dem praktischen Gebrauche der Resonatoren ist es nicht vortheilhaft, die Reduction von S und c sehr weit zu treiben, wahrscheinlich weil die zur Verbindung des Innern mit dem Ohre oder anderen sensitiven Apparaten nöthigen Vorrichtungen eine Abweichung von den den Berechnungen zu Grunde liegenden Annahmen in sich schliessen, die um so einflussreicher wird, je mehr die Dimensionen verkleinert werden. Steht der sensitive Apparat nicht in Verbindung mit dem Inneren, wie bei dem Versuche der Verstärkung des Schalles einer Stimmgabel mittelst eines Resonators, so treten andere Elemente in Frage; es ist dann eine besondere Untersuchung nothwendig (§. 319).

Mit Hülfe des Reciprocitätsprincipes lässt sich die Untersuchung des vorhergehenden Paragraphen darauf anwenden, die Wirkung einer Schallquelle zu berechnen, welche im Inneren eines Resonators liegt.

312. Wir gehen nun zur weiteren Discussion des Problemes der offenen Pfeife über. Wir wollen annehmen, dass das offene Ende der Pfeife mit einem unendlichen seitlichen Rande versehen und dass ihr Durchmesser klein im Vergleich zu der Wellenlänge der betrachteten Schwingung ist.

Als Einleitung in die Frage wollen wir weiter voraussetzen, dass der Mund der Pfeife mit einem frei beweglichen Kolben ohne Dicke und Masse versehen ist. Die vorhergehenden Probleme, von denen das gegenwärtige in Wirklichkeit nur wenig abweicht, haben uns schon Grund dazu gegeben, zu denken, dass die Gegenwart des Kolbens keine wesentliche Modification verursacht. Innerhalb der Pfeife soll (§. 255) das Geschwindigkeitspotential sein:

$$\varphi = (A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x)\, e^{int} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin, wie gewöhnlich, $\varkappa = 2\pi\lambda^{-1} = n a^{-1}$. Am Munde, wo $x = 0$,

$$\varphi_0 = A e^{int}; \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \varkappa B e^{int} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Auf der rechten Seite des Kolbens ist nach §. 302 die Beziehung zwischen φ_0 und $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0$:

$$\int\!\!\int \varphi_0\, d\sigma : \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = i\,\frac{\pi R^2}{\varkappa}\left\{1 - \frac{J_1(2\varkappa R)}{\varkappa R}\right\} - \frac{\pi}{2\varkappa^3} K_1(2\varkappa R) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

R ist der Radius der Pfeife. Hieraus lässt sich die Lösung des Problemes ohne irgend eine Einschränkung in Betreff der Kleinheit von $\varkappa R$ erhalten; da aber die Gegenwart des Kolbens nur in dem Falle, wo $\varkappa R$ klein ist, nicht wesentlich die Frage modificirt, so können wir sofort den Vortheil der Vereinfachung uns verschaffen, wenn wir wie in (1) §. 311 nehmen:

$$\int\!\!\int \varphi_0 d\sigma : \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \frac{i\pi\varkappa R^4}{2} - \frac{8R^3}{3} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Nun müssen, da der Kolben keinen Raum einnimmt, die Werthe von $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0$ auf beiden Seiten jenes dieselben sein; das

Gleiche muss, weil der Kolben keine Masse hat, für die Werthe von $\iint \varphi_0 \, d\sigma$ gelten. Daher:

$$A\sigma = \varkappa B \left\{ -\frac{8R^3}{3} + i\,\frac{\varkappa\pi R^4}{2} \right\}$$

oder:

$$A = B \left\{ -\frac{8\varkappa R}{3\pi} + i\,\frac{\varkappa^2 R^2}{2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Setzen wir dies in (1) ein, stossen den imaginären Theil ab und nehmen der Kürze halber $B = 1$, so haben wir:

$$\varphi = \left\{ \sin \varkappa x - \frac{8\varkappa R}{3\pi} \cos \varkappa x \right\} \cos nt$$

$$- \frac{1}{2}\, \varkappa^2 R^2 \cos \varkappa x \sin nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

In diesem Ausdrucke hängt das *sinnt* enthaltende Glied von der Zerstreuung ab und ist dasselbe, als wenn kein Kolben vorhanden wäre, während das $\frac{8\varkappa R}{3\pi}$ enthaltende Glied die Wirkung der Trägheit der äusseren Luft in der Nachbarschaft des Mundes darstellt. Um einen Vergleich mit den früheren Resultaten zu ziehen, sei α dadurch gegeben, dass:

$$\sin \varkappa x - \frac{8\varkappa R}{3\pi} \cos \varkappa x = \sin \varkappa\,(x - \alpha);$$

dann ist bei Vernachlässigung der Quadrate kleiner Grössen:

$$\alpha = \frac{8R}{3\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

und

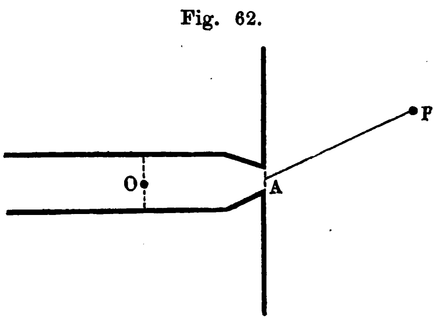
$$\varphi = \sin \varkappa\,(x - \alpha) \cos nt - \frac{1}{2}\,\varkappa^2 R^2 \cos \varkappa x \sin nt \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Diese Formeln zeigen, dass, wenn die Zerstreuung ausser Acht gelassen wird, das Geschwindigkeitspotential dasselbe ist, als wenn die Röhre um $\frac{8}{3\pi}$ tel des Radius verlängert wäre und das offene Ende dann sich wie ein Schwingungsbauch verhielte. Der Betrag der Correction stimmt mit dem überein, was wir nach früheren Untersuchungen als Resultat der Einführung

des Kolbens hätten erwarten können. Wir sahen, dass Grund zu der Ansicht vorliegt, dass der wahre Werth von α zwischen $\frac{\pi}{4} R$ und $\frac{8}{3\pi} R$ liegt und dass die Gegenwart des Kolbens das Glied, welches die Zerstreuung darstellt, nicht beeinflusst. Bevor wir aber unsere Resultate discutiren, wird es vortheilhaft sein, dieselben von Neuem nach einer ganz anderen Methode aufzusuchen, welche uns ausser ihrer etwas grösseren Allgemeinheit dazu verhelfen wird, Licht auf den Mechanismus des fraglichen Vorganges zu werfen.

313. Zu diesem Behufe ist es zweckmässig, den Ursprung nach der negativen Seite in eine solche Entfernung von der Mundöffnung zu verschieben, dass hier die Wellen annähernd eben sind, eine Verschiebung, welche gemäss unserer Voraussetzungen nicht mehr wie einen kleinen Bruchtheil der Wellenlänge zu betragen braucht. Die Schwierigkeit der Frage besteht darin, die Verbindung zwischen den Wellen in der Pfeife, welche in einer hinreichenden Entfernung von der Mundöffnung eben sind, und die nach aussen divergirenden Wellen, welche in einer mässigen Entfernung als sphärisch angesehen werden können, zu finden. Geht der Uebergang innerhalb eines Raumes vor sich, der klein ist im Vergleich zur Wellenlänge, welches offenbar geschehen muss, falls der Durchmesser klein genug ist, so lässt das Problem eine Lösung zu, welches auch die Form der Pfeife in der Nachbarschaft der Mundöffnung sein mag.

Fig. 62.



In einem Punkte P, der sich in einer mässigen Entfernung von A befindet, lautet das Geschwindigkeitspotential (§. 279):

$$\psi = \frac{A'}{r} e^{-i\varkappa r} e^{int} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

woraus:

$$\frac{d\psi}{dr} = - \frac{A' e^{i(nt - \varkappa r)}}{r^2} (1 + i\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir wollen das Verhalten einer Luftmasse betrachten, die zwischen dem ebenen Querschnitte durch O und einer halbkugelförmigen Fläche, deren Mittelpunkt A und deren Radius r ist, eingeschlossen liegt. r soll gross im Vergleiche zum Durchmesser der Pfeife, aber klein im Vergleich zur Wellenlänge sein. Innerhalb dieses Raumes muss sich die Luft annähernd so bewegen, wie es ein incompressibles Fluidum thun würde. Die Strömung durch die halbkugelförmige Fläche ist nun:

$$= 2\pi r^2 \frac{d\psi}{dr} = - 2\pi A' (1 + i\varkappa r) e^{i(nt - \varkappa r)}$$

$$= - 2\pi A' e^{int} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wenn das Quadrat von $\varkappa r$ vernachlässigt wird.

Nehmen wir, wie vorhin, für das Geschwindigkeitspotential innerhalb der Pfeife:

$$\varphi = (A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x) e^{int} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

so haben wir für den Strom durch den Querschnitt in O:

$$\sigma \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \sigma \varkappa B e^{int} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

und daher:

$$\sigma \varkappa B = - 2\pi A' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Das ist die erste Bedingung. Die zweite wird aus der Beachtung des Umstandes erhalten, dass der ganze Strom (dessen zwei Werthe eben einander gleich gesetzt sind) proportional dem Unterschiede des Potentiales an den Enden ist. Bezeichnen wir demnach mit c die Leitungsfähigkeit des Ueberganges zwischen den Endflächen, so haben wir:

$$\sigma \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = c\,(\varphi_r - \varphi_0),$$

oder:

$$\frac{\sigma \varkappa B}{c} = \frac{A'}{r} e^{-i\varkappa r} - A \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Setzt man für A' den Werth aus (6), so erhält man:

$$-A = \sigma \varkappa B \left(\frac{1}{c} + \frac{e^{-i\varkappa r}}{2\pi r}\right) = \sigma \varkappa B \left\{\frac{1}{c} + \frac{1}{2\pi r} - \frac{i\varkappa}{2\pi}\right\}.$$

In diesem Ausdrucke lässt sich das zweite Glied gegen das erste vernachlässigen, denn c ist meistens eine Grösse von derselben Ordnung wie der Radius der Pfeife; bei sehr verengter Mundöffnung ist c noch kleiner. Daher dürfen wir setzen:

$$A = \sigma \varkappa B \left(-\frac{1}{c} + \frac{i\varkappa}{2\pi}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Nach Einsetzung dieses Werthes in (4) erhalten wir für den imaginären Ausdruck des Geschwindigkeitspotentiales innerhalb der Pfeife, wenn B gleich der Einheit gesetzt wird:

$$\varphi = \left\{\sin \varkappa x + \sigma \varkappa \left(-\frac{1}{c} + \frac{i\varkappa}{2\pi}\right) \cos \varkappa x\right\} e^{int},$$

oder, wenn nur der reelle Theil zurückbehalten wird:

$$\varphi = \left\{\sin \varkappa x - \frac{\sigma \varkappa}{c} \cos \varkappa x\right\} \cos nt - \frac{\varkappa^2 \sigma}{2\pi} \cos \varkappa x \sin nt \ldots (9).$$

Nach Helmholtz können wir unsere Resultate vereinfachen, indem wir eine Grösse α einführen, welche gegeben ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varkappa \alpha = \frac{\varkappa \sigma}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Daher:

$$\varphi = \frac{\sin \varkappa (x - \alpha)}{\cos \varkappa \alpha} \cos nt - \frac{\varkappa^2 \sigma}{2\pi} \cos \varkappa x \sin nt \ldots (11).$$

Das entsprechende Potential ausserhalb der Mundöffnung lautet:

$$\psi = -\frac{\sigma \varkappa}{2\pi r} \cos (nt - \varkappa r) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Bedeutet R den Radius der Pfeife, so lässt sich σ durch πR^2 ersetzen.

Ist die Pfeife ein einfacher Cylinder und liegt der Ursprung des Schalles in einer Entfernung $\triangle L$ von der Mundöffnung, so wissen wir, dass $\sigma c^{-1} = \triangle L + \mu R$, worin μ eine Zahl bedeutet, die ziemlich viel grösser als $\frac{1}{4}\pi$ ist. In solch einem Falle (wenn der Ursprung hinreichend nahe an der Mundöffnung liegt) ist $\varkappa\alpha$ eine kleine Grösse und daher nach (10):

$$\alpha = \frac{\sigma}{c} = \triangle L + \mu R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Gleichzeitig kann man $\cos \varkappa\alpha$ gleich Eins setzen. Das Hauptglied in φ, welches $\cos nt$ enthält, lässt sich dann so berechnen, als wenn die Pfeife verlängert wäre und ausserdem in einem Punkte, der in einer Entfernung μR jenseits der wirklichen Lage des Mundes liegt, ein Bauch läge, in Uebereinstimmung mit dem, was wir früher fanden. Diese Resultate, welche für gewöhnliche Pfeifen angenähert gelten, werden streng richtig, wenn der Durchmesser ohne Grenzen verringert wird; Reibung ist dabei vernachlässigt.

Befindet sich bei A kein seitlicher Rand, so wird der Werth von c etwas durch die Entfernung dessen, was als Hinderniss wirkt, modificirt; die Hauptwirkung liegt aber in dem Gliede, welches die Zerstreuung darstellt. Setzen wir als eine Annäherung voraus, dass die von A divergirenden Wellen sphärisch sind, so müssen wir für den Strom an Stelle von $2\pi r^2 \frac{d\psi}{dr}$ nehmen $4\pi r^2 \frac{d\psi}{dr}$. Die schliessliche Wirkung der Aenderung liegt in der Halbirung ebensowohl des Ausdruckes für das Geschwindigkeitspotential ausserhalb der Mundöffnung, wie des entsprechenden zweiten Gliedes in φ (das $\sin nt$ enthält). Man sieht daher, dass der Betrag der Zerstreuung wesentlich von dem Grade abhängt, in welchem die Wellen frei divergiren können; unsere analytischen Ausdrücke müssen nicht für mehr als rohe Schätzungen angesehen werden.

Die correcte Theorie der offenen Orgelpfeife, welche Gleichungen (11) und (12) umschliesst, wurde von Helm-

holtz[1]) aufgefunden, dessen Methode indessen wesentlich von der hier angenommenen abweicht. Die ersten Lösungen des Problemes von Lagrange, D. Bernouilli und Euler waren auf der Annahme begründet, dass der Druck an einem offenen Ende nicht von dem der umgebenden Atmosphäre abweichen könne, ein Princip, das man vielleicht selbst jetzt noch für anwendbar auf ein Ende, dessen Offenheit ideal vollkommen ist, halten kann. Die Thatsache, dass in allen gewöhnlichen Fällen Energie entweicht, liefert einen Beweis dafür, dass sich nirgendwo in der Pfeife ein absoluter Bauch vorfindet; es hätte im Voraus erwartet werden können, dass die Trägheit der dicht ausserhalb des Mundes befindlichen Luft die Wirkung einer Verlängerung der Pfeifenlänge haben würde. Die Lagen der Knotenpunkte in einer tönenden Pfeife wurden experimentell von Savart[2]) und Hopkins[3]) untersucht mit dem Resultate, dass das Intervall zwischen dem Munde und dem nächsten Knotenpunkte immer kleiner wie die Hälfte des Intervalles zwischen zwei auf einander folgenden Knoten ist.

314. Experimentelle Untersuchungen über die Correction für ein offenes Ende sind im Allgemeinen ohne Benutzung eines seitlichen Randes angestellt; daher wird es wichtig sein, sich einigermaassen eine rohe Schätzung des Einflusses dieses Randes zu bilden. Bis jetzt ist noch keine theoretische Lösung des Problemes eines Endes ohne seitlichen Rand gegeben, indessen lässt sich leicht sehen, dass die Entfernung des Randes die Correction beträchtlich unter den Werth 0,82 R herunterdrücken wird (Appendix A). Bei dem Fehlen der Theorie habe ich versucht, den Einfluss des seitlichen Randes experimentell zu bestimmen[4]). Zwei Orgelpfeifen, die nahe genug mit einander im Einklang standen, um zählbare Schwebungen zu geben, wurden durch einen Blasebalg angeblasen; die Wirkung

[1]) Crelle, Bd. 57, p. 1, 1860.

[2]) Recherches sur les vibrations de l'air. Ann. d. Chim. t. XXIV, 1823.

[3]) Aerial vibrations in cylindrical tubes. Cambridge Transactions, Vol. V, p. 231, 1833.

[4]) Phil. Mag. (5) III, 456, 1877.

des seitlichen Randes wurde von dem Unterschiede in der Anzahl der Schwebungen hergeleitet, je nachdem eine der Pfeifen mit einem Rande versehen war oder nicht. Die von dem Rande herrührende Correction betrug etwa 0,2 *R*. Eine (wahrscheinlich glaubwürdigere) Wiederholung dieses Versuches durch Bosanquet gab 0,25 *R*. Ziehen wir 0,22 *R* von 0,82 *R* ab, so erhalten wir 0,6 *R*. Dies kann als der wahrscheinliche Werth der Correction für ein offenes Ende ohne seitlichen Rand angesehen werden unter der Voraussetzung, dass die Wellenlänge gross im Vergleich zum Durchmesser der Pfeife ist.

Versuche, die Correction ganz mittelst Experiment zu bestimmen, haben bisher nicht zu sehr genauen Resultaten geführt. Messungen von Werthheim[1]) bei an beiden Enden offenen Pfeifen gaben als Mittel (für jedes Ende) 0,663 *R*, während für Pfeifen, die nur an einem Ende offen waren, das mittlere Resultat 0,746 *R* betrug. Bei zwei sorgfältigen Versuchen von Bosanquet[2]) an doppelt offenen Pfeifen betrug die Correction für ein Ende 0,635 *R*, wenn $\lambda = 12\,R$ und 0,543 *R*, wenn $\lambda = 30\,R$. Bosanquet giebt als eine allgemeine Regel an, dass die (als Bruchtheil von *R* ausgedrückte) Correction mit dem Verhältnisse des Durchmessers zur Wellenlänge wächst; ein Theil dieses Anwachsens mag indessen von der wechselseitigen Reaction der Enden abhängen, welche bewirkt, dass die Symmetrieebene sich wie eine starre Wand verhält. Ist die Pfeife nur mässig lang im Verhältnisse zu ihrem Durchmesser, so nähert man sich einem Zustande der Dinge, welcher sich eher durch das Vorhandensein als durch die Abwesenheit eines seitlichen Randes darstellen lässt. Die Vergleichung von Theorie und Beobachtung über diesen Punkt hat einige Schwierigkeit, weil der aus den Beobachtungen berechnete Werth der Correction, wenn diese klein ist, mit Unsicherheiten in Betreff der absoluten Höhe und der Geschwindigkeit des Schalles behaftet ist, während für den Fall, wo die Correction relativ grösser ausfällt, mit welchem Falle

---

[1]) Ann. d. Chim. (3) t. XXXI, p. 394.

[2]) Phil. Mag. (5) IV, p. 219, 1877.

sich der Versuch in mehr berechtigter Weise befassen kann, gegenwärtig noch keine Theorie existirt. Wahrscheinlich könnte ein genauerer Werth für die Correction mittelst eines Resonators von der in §. 306 betrachteten Art erhalten werden, bei dem die Verbindung mit der äussern Luft durch eine einfache Oeffnung bewerkstelligt wird; die „Länge" ist in diesem Falle Null und die „Correction" bleibt allein übrig. Einige Messungen dieser Art, bei denen indessen keine grosse Genauigkeit erstrebt wurde, finden sich in meiner Arbeit über Resonanz [1]).

Verschiedene Methoden sind benutzt worden, um die Tonhöhe der Resonatoren experimentell zu bestimmen. Am häufigsten hat man vielleicht die Resonatoren nach der Art der Orgelpfeifen durch einen schräg gegen ihre Mundöffnung geblasenen Luftstrom ansprechen lassen. Obgleich auf diese Weise gute Resultate erhalten sind, macht doch unsere Unkenntniss über die Art der Wirkung des Windes die Methode ungenügend. Bei den Versuchen von Bosanquet wurden die Pfeifen nicht wirklich zum Ansprechen gebracht, sondern es wurden kurze discontinuirliche Luftstösse gegen das offene Ende geblasen; Bosanquet schätzte die Tonhöhe nach den freien Schwingungen ab, bei denen der Klang verschwand. Eine im Principe ähnliche Methode, welche ich manchmal mit Vortheil benutzt habe, besteht in der Erregung von freien Schwingungen mittelst eines Schlages. Um einen Klang so bestimmt wie möglich zu erhalten ist es von Wichtigkeit, die Härte der Substanz, mit welcher der Resonator in Berührung kommt, der Tonhöhe zu accommodiren; ein tiefer Ton erfordert einen sanften Schlag. So kann die Tonhöhe einer Stimmpfeife sofort bestimmt werden, indem man dieselbe gegen das gebogene Knie schlägt.

Beim Gebrauche dieser Methode dürfen wir nicht ganz die Thatsache übersehen, dass die natürliche Tonhöhe eines schwingenden Körpers durch ein Glied geändert wird, welches

---

[1]) Phil. Trans. 1871. Siehe ebenfalls Sondhauss, Pogg. Ann. Bd. 140, 53, 219 (1870), und einige Bemerkungen darüber von mir selbst (Phil. Mag. Sept. 1870).

von dem Quadrate der Zerstreuung abhängt. Mit der Benennung des §. 45 wird die Schwingungszahl von n auf $n\left(1-\frac{1}{8}\varkappa^2 n^{-2}\right)$ vermindert, oder, wenn x die Anzahl der Schwingungen ist, welche ausgeführt werden, während die Amplitude in dem Verhältniss von $e:1$ abnimmt, von n auf:

$$n\left(1-\frac{1}{8\pi^2x^2}\right).$$

Es wird indessen kaum der Mühe werth sein, die Correction in Rechnung zu ziehen.

Die in meiner Arbeit über Resonanz gegebenen Messungen sind nach einem anderen Principe ausgeführt, indem der Klang der grössten Resonanz abgeschätzt wurde. Das Ohr befand sich mit dem Inneren des Hohlraumes in Verbindung, während die chromatische Scala erklang. Auf diese Weise ergab es sich nach einer kleinen Uebung als möglich, die Tonhöhe eines guten Resonators ungefähr auf ein Viertel eines halben Tones genau zu schätzen. Bei kleinen Flaschen mit langen Hälsen, bei denen die obige Methode nicht anwendbar sein würde, zeigte es sich ausreichend, die Flasche bloss nahe an die schwingenden Saiten eines Pianinos zu halten. Der resonirende Klang annoncirt sich selbst durch ein Erzittern des Flaschenbodens, das leicht mit dem Finger wahrzunehmen ist. Beim Gebrauche dieser Methode ist es wichtig, dass das Gehör frei von der Neigung ist, das Intervall zwischen zwei auf einander folgenden halben Tönen noch weiter einzutheilen. Kennt man das theoretische Resultat, so wird es meist unmöglich sein, durch den Versuch zu einer davon unabhängigen Ansicht zu kommen.

315. Wir wollen nun nach Helmholtz etwas näher die Natur der Bewegungen innerhalb der Pfeife untersuchen, welche Bewegung durch (11) §. 313 dargestellt wird. Wir haben:

$$\varphi = L\cos(nt-\vartheta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

woraus:

$$L^2 = \frac{\sin^2\varkappa(x-\alpha)}{\cos^2\varkappa\alpha} + \frac{\varkappa^4\sigma^2}{4\pi^2}\cos^2\varkappa x \quad \ldots (2),$$

$$tang\,\vartheta = -\frac{\varkappa^2 \sigma \cos \varkappa \alpha \cos \varkappa x}{2\pi \sin \varkappa (x-\alpha)} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

In dem Ausdrucke für L^2 ist das zweite Glied sehr klein und daher treten die Maximalwerthe von φ sehr nahezu ein, wenn:

$$\varkappa (x - \alpha) = \left(-m + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

oder:

$$-x = \frac{1}{2} m\lambda - \frac{1}{4}\lambda - \alpha \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

worin m eine positive ganze Zahl bedeutet.

Die Entfernung zwischen zwei auf einander folgenden Maxima beträgt daher $\frac{1}{2}\lambda$ und der Werth des Maximums ist $sec^2 \varkappa\alpha$. Die Minimalwerthe für L^2 treten annähernd ein, wenn $\varkappa (x - \alpha) = - m\pi$ oder

$$-x = \frac{1}{2} m\lambda - \alpha \quad \ldots \ldots \quad (5);$$

ihre Grösse wird gegeben durch:

$$L^2 = \frac{\varkappa^4 \sigma^2}{4\pi^2} \cos^2 \varkappa x = \frac{\varkappa^4 \sigma^2}{4\pi^2} \cos^2 \varkappa \alpha \quad \ldots \quad (6).$$

Auf gleiche Weise:

$$\frac{d\varphi}{dx} = J \cos (nt - \chi) \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

woraus:

$$J^2 = \varkappa^2 \frac{\cos^2 \varkappa (x-\alpha)}{\cos^2 \varkappa \alpha} + \frac{\varkappa^6 \sigma^2}{4\pi^2} \sin^2 \varkappa x \quad \ldots \quad (8),$$

$$tang\,\chi = \frac{\varkappa^2 \sigma \cos \varkappa \alpha \sin \varkappa x}{2\pi \cos \varkappa (x-\alpha)} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Die Maximalwerthe für J^2 treten ein, wenn:

$$-x = \frac{1}{2} m\lambda - \alpha \quad \ldots \ldots \quad (10),$$

und die Minimalwerthe, wenn

$$-x = \frac{1}{2} m\lambda - \frac{1}{4}\lambda - \alpha \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Der angenäherte Werth des Maximums ist $\varkappa^2 sec^2 \varkappa\alpha$ und der des Minimums $\varkappa^2 \sigma^2 cos^2 \varkappa\alpha : 4\pi^2$. Es geht hieraus hervor, dass die Maxima der Geschwindigkeit in denselben Theilen der Pfeife eintreten, wie die Minima der Verdichtung (und Verdünnung); und die Minima der Geschwindigkeit an denselben Stellen, wo die Maxima der Verdichtung liegen. Die Reihen der Bäuche und Knoten sind so angeordnet, als wenn der erste Bauch in einer Entfernung α jenseits der Mundöffnung wäre.

In Bezug auf die Phasen sehen wir, dass sowohl ϑ wie χ im Allgemeinen klein ausfallen; daher ist mit Ausnahme der Stellen, wo L^2 und J^2 ihrem Minimum nahe sind, die ganze Bewegung synchron, als wenn dort keine Zerstreuung vorhanden wäre.

Bisher behandelten wir das Problem des Durchganges von ebenen Wellen durch die Pfeife und ihre allmälige Diffusion von der Mundöffnung ohne Rücksicht auf den Ursprung der ebenen Wellen selbst. Alles, was wir angenommen haben, ist das, dass der Ursprung der Bewegung irgendwo innerhalb der Pfeife liegt. Wir wollen nun annehmen, dass die Bewegung von der bekannten Schwingung eines Kolbens herrührt, welcher sich bei $x = -l$ befindet, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten bei der Mundöffnung liegt. Daher haben wir für $x = -l$:

$$\frac{d\varphi}{dx} = G \cos nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12);$$

man muss diesen Ausdruck dem durch Einführung von willkürlicher Amplitude und Phase verallgemeinerten Ausdrucke für die ebenen Wellen entsprechen machen.

Wir können setzen:

$$\frac{d\varphi}{dx} = BJ \cos(nt - \varepsilon - \chi) \quad \ldots\ldots \quad (13);$$

worin J und χ die in (8), (9) gegebenen Werthe haben, während B und ε willkürlich sind. Durch Vergleichung von (12) mit (13) schliessen wir, dass:

$$tang\,\varepsilon = \frac{\varkappa^2 \sigma \cos \varkappa\alpha \sin \varkappa l}{2\pi \cos \varkappa(l+\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

$$G^2 = B^2 \varkappa^2 \left\{ \frac{\cos^2 \varkappa(l+\alpha)}{\cos^2 \varkappa\alpha} + \frac{\varkappa^4 \sigma^2}{4\pi^2} \sin^2 \varkappa l \right\} \ldots (15),$$

wodurch B und ε bestimmt sind.

In Uebereinstimmung mit (12) §. 313 wird die entsprechende divergirende Welle dargestellt durch:

$$\psi = -\frac{\sigma \varkappa B}{2\pi r} \cos(nt - \varepsilon - \varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Ist G gegeben, so hat B seinen grössten Werth für $\cos \varkappa (l + \alpha) = 0$, das ist, wenn der Kolben bei einem angenäherten Knoten liegt. In diesem Falle haben wir:

$$B = \frac{2\pi}{\varkappa^3 \sigma \cos \varkappa \alpha} G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

welches zeigt, dass die Grösse der resultirenden Schwingung sehr gross, wenn auch nicht unendlich ist, da $\cos \varkappa \alpha$ nicht verschwinden kann. Bei sehr verengter Mundöffnung kann $\cos \varkappa \alpha$ klein werden; in diesem Falle ist es aber nöthig, dass die Adjustirung der Perioden sehr genau wird, damit das erste Glied von (15) im Vergleiche zum zweiten vernachlässigt werden darf. Bei gewöhnlichen Pfeifen ist $\cos \varkappa \alpha$ nahezu gleich der Einheit.

Das Minimum der Schwingung tritt ein, wenn l der Art ist, dass $\cos \varkappa (l + \alpha) = \pm 1$, d. h. wenn der Kolben bei einem Bauche liegt. In diesem Falle haben wir:

$$B = \frac{G \cos \varkappa \alpha}{\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Die Schwingung ausserhalb der Pfeife ist dann, gemäss dem Werthe von α, gleich oder kleiner als die Schwingung, welche dort sein würde, wenn keine Pfeife vorhanden wäre und die schwingende Platte zu einem Theile der yz-Ebene gemacht würde.

316. Unsere Gleichungen lassen sich auch auf die Untersuchung der Bewegung anwenden, welche in einer Pfeife durch äussere Schallquellen erregt wird. Wir wollen zunächst annehmen, dass der Mund der Pfeife durch eine feste Platte geschlossen ist, welche einen Theil der yz-Ebene bildet, und dass das von den äusseren Quellen herrührende Potential (welches auf der Platte annähernd constanten Werth hat) unter diesen Umständen lautet:

$$\psi = H \cos nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin ψ von dem von jeder Quelle und ihrem Bilde in der yz-Ebene herrührenden Potentiale zusammengesetzt ist, wie das in §. 278 erklärt wurde. Innerhalb der Pfeife möge das Potential sein:

$$\varphi = H \cos \varkappa x \cos nt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

so dass φ und seine Differentialquotienten beim Durchgange durch die Wand continuirlich bleiben. Der physikalische Sinn hiervon ist einfach. Wir denken uns innerhalb der Pfeife eine derartige Bewegung, wie dieselbe durch die Bedingungen bestimmt wird, dass die Geschwindigkeit am Munde Null und dass die Verdichtung am Munde dieselbe ist, wie diejenige, welche von den Schallquellen herrührt, wenn der Mund geschlossen ist. Es liegt auf der Hand, dass unter diesen Umständen die verschliessende Platte sich ohne irgend eine Aenderung in der Bewegung entfernen lässt. Nun ist indessen im Allgemeinen eine endliche Geschwindigkeit bei $x = -l$ vorhanden, und daher können wir nicht annehmen, dass die Pfeife dort geschlossen ist. Liegt aber etwa bei $x = -l$ ein Knoten, d. h. hat l einen solchen Werth, dass $\cos \varkappa (l + \alpha) = 0$, so sind alle Bedingungen erfüllt, und die wirkliche Bewegung innerhalb der Pfeife ist die durch (2) ausgedrückte. Diese Bewegung ist ersichtlich dieselbe, wie die, welche erhalten würde, wenn die Pfeife an beiden Enden geschlossen wäre. Das Potential hat in dem äusseren Raume denselben Werth, als wenn man den Mund der Pfeife mit der starren Platte verschlossen hätte.

In dem allgemeinen Falle müssen wir, um die Luft bei $x = -l$ zur Ruhe zu bringen, der durch (2) dargestellten Bewegung eine andere überlagern von der Art, wie sie in §. 313 untersucht wurde, und die so bestimmt ist, dass sie bei $x = -l$ eine Geschwindigkeit gleich und entgegengesetzt der Geschwindigkeit der ersten Bewegung giebt. Wird daher die zweite Bewegung durch:

$$\frac{d\varphi}{dx} = B J \cos (nt - \varepsilon - \chi)$$

gegeben, so haben wir $\varepsilon + \chi = 0$ und:

$$B^2\left\{\frac{\cos^2\varkappa(l+\alpha)}{\cos^2\varkappa\alpha}+\frac{\varkappa^4\sigma^2}{4\pi^2}\sin^2\varkappa l\right\}=H^2\sin^2\varkappa l\ldots(3).$$

Ist $\sin\varkappa l=0$, so haben wir, wie oben auseinandergesetzt wurde, $B=0$. Der Maximalwerth von B tritt für $\cos\varkappa(l+\alpha)=0$ ein und dann:

$$B=\frac{2\pi H}{\varkappa^2\sigma}\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$ [1].

Es geht hieraus hervor, dass, wie erwartet werden konnte, die Resonanz die grösste ist, wenn die reducirte Länge ein ungerades Vielfache von $\frac{1}{4}\lambda$ beträgt.

317. Aus dem Principe, dass in der Nachbarschaft eines Knoten die Trägheit der Luft nicht sehr ins Spiel tritt, folgern wir, dass an solchen Stellen die Gestalt einer Röhre geringen Einfluss hat, und dass man dort nur auf das Volumen der Röhre achten muss. Diese Ueberlegung erlaubt uns, die Tonhöhe einer Pfeife zu berechnen, welche im grössten Theile ihrer Länge (l) cylindrisch ist, sich aber nahe den Enden in eine Kugel von kleinem Volumen (S) erweitert. Die reducirte Länge ist dann offenbar:

$$l+\alpha+S\sigma^{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

worin α die Correction für das offene Ende und σ den Flächeninhalt des Querschnittes des cylindrischen Theiles bedeutet. Diese Formel ist häufig nützlich und kann auch angewandt werden, wenn die Abweichung von der cylindrischen Form nicht die Form einer Verbreiterung annimmt.

Ist die durch S dargestellte Verbreiterung zu gross, um die obige Behandlung zu gestatten, so können wir folgendermaassen vorgehen. Vernachlässigt man die Zerstreuung, so lässt sich das Geschwindigkeitspotential in der Röhre wie folgt wählen:

$$\varphi=\sin\varkappa(x-\alpha)\cos nt,$$

wenn der Anfangspunkt beim Munde liegt, während α annähernd $=\frac{1}{4}\pi R$. Bei $x=-l$ haben wir:

[1] Helmholtz, Crelle, 1860.

$$\dot{\varphi} = n \sin \varkappa (l + \alpha) \sin nt,$$

und

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varkappa \cos \varkappa (l + \alpha) \cos nt.$$

Nun wird die Verdichtung gegeben durch $s = - a^{-2} \dot{\varphi}$, und die bei $x = - l$ zu erfüllende Bedingung lautet:

$$S \frac{ds}{dt} = - \sigma \frac{d\varphi}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wenn angenommen wird, dass die Verdichtung innerhalb S merklich gleichförmig ist. Daher haben wir:

$$S n^2 a^{-2} \sin \varkappa (l + \alpha) = \sigma \varkappa \cos \varkappa (l + \alpha),$$

oder, da $n = a\varkappa$:

$$\tan g\, \varkappa (l + \alpha) = \frac{\sigma}{\varkappa S} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

als Gleichung, welche die Tonhöhe bestimmt. Numerische Beispiele der Anwendung von (3) finden sich in meiner Arbeit über Resonanz. (Phil. Trans. 1871, p. 117.)

Eine ähnliche Beweisführung zeigt, dass sich in jedem Falle von stationären Schwingungen, für welche die Wellenlänge mehrmals so gross wie der Durchmesser der Kugel ist, das Ende der an die Kugel sich ansetzenden Röhre annähernd wie ein offenes Ende verhält, wenn $\varkappa S$ viel grösser wie σ ist, und wie ein geschlossenes, wenn $\varkappa S$ viel kleiner wie σ.

318. Die Wirkung eines Resonators, der unter dem Einflusse einer mit ihm im Einklange befindlichen Schallquelle steht, ist ein Punkt von erheblicher Feinheit und Wichtigkeit, und zwar einer, über den unter den akustischen Schriftstellern, den Autor nicht ausgenommen, ein gut Theil Confusion herrscht.

Es giebt Fälle, in denen ein Resonator Schall absorbirt, als wenn er selbst die Schwingungen anzöge und so dieselben von Regionen ablenkte, wohin dieselben sonst gelangen würden. Z. B. sei eine einzige Schallquelle B vorhanden, die in einer engen Pfeife in einer Entfernung $\frac{1}{4} \lambda$ (oder irgend ein ungerades Vielfache davon) von einem geschlossenen Ende

und nicht zu nahe dem Munde gelegen ist. Dann ist ihre Wirkung in irgend einem entfernten äusseren Punkte gleich Null. Das ist eine unmittelbare Folge des Reciprocitätsprincipes, weil, wenn A die Quelle wäre, keine Aenderung des Potentiales in B eintreten könnte. Die Beschränkung, welche eine zu grosse Nähe an dem Munde ausschliesst, kann fallen gelassen werden, wenn wir uns die Quelle B gleichförmig über den Querschnitt ausgebreitet, anstatt in einem Punkte concentrirt denken. Dann ist, welches auch die Grösse und Gestalt des Querschnittes sein mag, auf der anderen Seite absolut keine Störung vorhanden. Das ergiebt sich klar aus der Theorie der Schwingungen nach einer Dimension. Die reciproke Form des Satzes — dass, welche Quellen von Störungen auch jenseits des Querschnittes existiren mögen, $\int\int \varphi \, d\sigma = 0$ ist — lässt sich aus der Helmholtz'schen Formel (2) §. 293 beweisen, indem wir für φ das Geschwindigkeitspotential der rein axialen Schwingung von derselben Periode nehmen.

Es ist kaum nothwendig, zu sagen, dass die Quelle stets, wenn keine Energie ausgesandt wird, auch keine Arbeit thut, und das erfordert nicht, dass bei der Quelle keine Druckänderung eintritt — denn das ist in dem Falle einer einzelnen Quelle unmöglich — sondern dass der veränderliche Theil des Druckes genau die Phase der Beschleunigung hat, und keine Componente mit der Phase der Geschwindigkeit vorhanden ist.

Andere Beispiele von der Absorption des Schalles durch Resonatoren werden von gewissen Modificationen der Herschel'schen Interferenzröhre geliefert, welche von Quincke[1]) gebraucht wurden, um Töne von bestimmter Höhe von der Erreichung des Ohres abzuhalten.

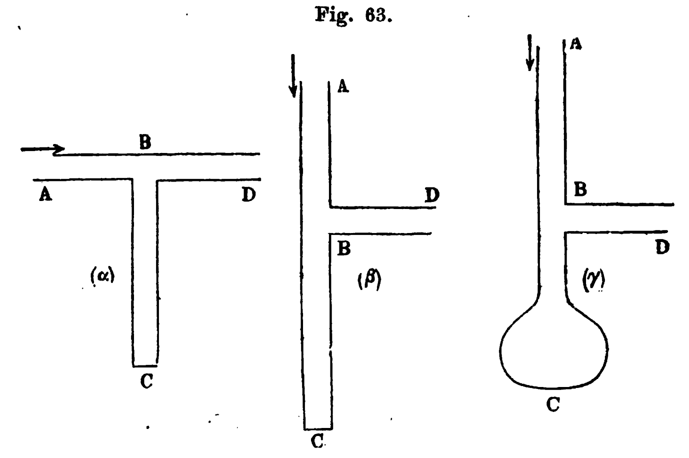
Bei der in Fig. 63 (a. f. S.) dargestellten Combination von Pfeifen tritt der Schall frei bei A ein, bei B befindet er sich an dem Munde eines Resonators, dessen Tonhöhe mit der seinigen identisch ist. Unter diesen Umständen wird er absorbirt, keine Schwingung ist vorhanden, die sich längs BD

---

[1]) Pogg. Ann. CXXVIII, 177. 1866.

fortsetzt. Es liegt auf der Hand, dass sich die cylindrische Röhre $B\,C$ durch irgend einen anderen Resonator von derselben

Fig. 63.



Tonhöhe (γ) ersetzen lässt, ohne die Wirkung des Apparates zu beeinträchtigen. Die gewöhnliche Erklärung durch Interferenz (so genannte) der directen und reflectirten Wellen ist dann weniger anwendbar.

Diese Fälle, wo die Quelle sich an der Mundöffnung eines Resonators befindet, müssen nicht mit anderen verwechselt werden, bei denen die Quelle im Inneren liegt. Ist B eine am Boden einer geschlossenen Pfeife, deren reducirte Länge $\frac{1}{4}\lambda$ beträgt, befindliche Quelle, so kann die Intensität in einem äusseren Punkte A bedeutend grösser sein, wie wenn keine Pfeife vorhanden wäre. Thatsächlich ist das Potential bei A, welches von der Quelle bei B herrührt, dasselbe, als es bei B sein würde, wenn die Quelle in A läge.

319. Für eine nähere Untersuchung des Mechanismus der Resonanz werden wir das Problem in einer von unnöthigen Schwierigkeiten befreiten Form erhalten, wenn wir annehmen, dass der Resonator aus einer kleinen kreisförmigen Platte besteht, die durch eine Feder zurückgehalten wird und in eine unendlich starre Ebene eingelassen ist. Es wurde in einem

früheren Capitel (30) §. 302 bewiesen, dass die Schwingungsgleichung, wenn M die Masse der Platte, ξ ihre Verschiebung, $\mu\xi$ die die Platte in ihre Lage zurückziehende Kraft (Restitutionskraft), R den Radius und σ die Dichtigkeit der Luft bedeutet, lautet:

$$\left(M + \frac{8\sigma R^3}{3}\right)\ddot{\xi} + \frac{a\sigma\pi\varkappa^2 R^4}{2}\dot{\xi} + \mu\xi = F \quad . . . (1),$$

worin F und ξ proportional mit $e^{i\varkappa at}$ sind.

Fällt die natürliche Schwingungsperiode (die Reaction der äusseren Luft eingeschlossen) mit der auferlegten zusammen, so reducirt sich die Gleichung auf:

$$\frac{1}{2} a\sigma\pi\varkappa^2 R^4 \dot{\xi} = F \quad . . . . (2).$$

Wir wollen nun annehmen, dass F von einer äusseren Schallquelle herrührt, welche, wenn die Platte in Ruhe ist, ein Potential ψ_0 giebt, das auf der Fläche der Platte einen nahezu constanten Werth hat. Daher:

$$F = -\delta p \,.\, \pi R^2 = i\varkappa a\sigma \,.\, \pi R^2 \,.\, \psi_0 \quad . . . . (3),$$

so dass:

$$\pi R^2 \dot{\xi} = \dot{X} = 2 i\pi\varkappa^{-1}\psi_0 = i\lambda\psi_0 \quad . . . . (4);$$

das Potential in einer Entfernung r, welches von der Bewegung der Platte herrührt, wird sein:

$$\varphi = -\frac{\dot{X}}{2\pi}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} = -\frac{i\psi_0}{\varkappa}\frac{e^{-i\varkappa r}}{r} = \psi_0 \frac{e^{-i\varkappa r}}{i\varkappa r} \quad . . . (5),$$

unabhängig, wie wohl zu bemerken ist, von dem Flächeninhalte der Platte.

Indem wir für den Augenblick den Fall des vollkommenen Isochronismus verlassen, wollen wir annehmen, dass:

$$-\left(M + \frac{8\sigma R^3}{3}\right)\varkappa'^2 a^2 + \mu = 0 \quad . . . . (6),$$

so dass $2\pi\varkappa'^{-1}$ die Wellenlänge des natürlichen Klanges des Resonators ist. Wird M' für $M + \frac{8}{3}\sigma R^3$ geschrieben, so nimmt die (5) entsprechende Gleichung die Form an:

$$\varphi = \psi_0 \frac{e^{-i\varkappa r}}{i\varkappa r} : \left[1 - 2 i M' \frac{\varkappa'^2 - \varkappa^2}{\pi\sigma\varkappa^3 R^4}\right] \quad . . . (7),$$

woraus wir, wie vorher, schliessen können, dass, wenn $\varkappa' = \varkappa$, die Wirksamkeit des Resonators, als eine Quelle, unabhängig von R ist. Bei unvollkommener Adjustirung hängt das Gesetz der Schwächung von $M' R^{-4}$ ab. Daher wird, wenn M' gross und R klein ist, obgleich die Maximalwirksamkeit des Resonators nicht geringer ausfällt, eine grössere Genauigkeit in der Adjustirung erforderlich sein, um das Maximum zu erreichen (§. 49). Bei Resonatoren mit einfachen Oeffnungen ist $M' = \frac{16}{3} \sigma R^3$, so dass sich $M' R^{-4}$ wie R^{-1} ändert. Demgemäss erfordern Resonatoren mit kleinen Oeffnungen die grösste Genauigkeit in der Abstimmung; der Unterschied ist aber nicht von Bedeutung. Aus einer Vergleichung der gegenwärtigen Untersuchung mit der des §. 311 geht hervor, dass die Bedingungen der Wirksamkeit verschieden sind, je nachdem innere oder äussere Wirkungen betrachtet werden.

Wir wollen nun zu dem Falle des Isochronismus zurückkehren und weiter voraussetzen, dass die äussere Schallquelle, auf welche der Resonator A anspricht, in der Bewegung einer ähnlichen Platte B besteht, deren Abstand c von A eine Grösse gross im Vergleich zu den Dimensionen der Platte ist. Man kann annehmen, dass B eine derartige Intensität hat, dass das Potential von B wird:

$$\psi = \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Demgemäss haben wir $\psi_0 = c^{-1} e^{-i\varkappa c}$ und daher nach (5):

$$\varphi = \psi_0 \frac{e^{-i\varkappa r}}{i\varkappa r} = \frac{e^{-i\varkappa c}}{i\varkappa c} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad \ldots\ldots \quad (9),$$

diese Gleichung zeigt, dass in gleichen Abständen von ihren Quellen:

$$\varphi : \psi = e^{-i\varkappa c} : i\varkappa c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Die Beziehung zwischen den Phasen lässt sich so darstellen, dass man sich die inducirte Schwingung φ von B ausgehend durch A hindurch fortschreiten denkt und ausserdem einer Verzögerung von $\frac{1}{4}\lambda$ unterworfen, so dass die ganze Verzögerung

zwischen B und A beträgt $c + \frac{1}{4}\lambda$. In Hinsicht auf die Amplitude ist φ in dem Verhältnisse $1 : \varkappa c$ grösser wie ψ.

Ist demnach $\varkappa c$ klein, so wird die inducirte Schwingung bei Weitem die grössere sein, und der ganze Schall ist viel lauter, als wenn A nicht wirken könnte. In diesem Falle tritt bei der Phase eine Verzögerung um eine Viertel Periode ein.

Es ist von Wichtigkeit, eine klare Vorstellung von dem Grunde dieser Verstärkung des Schalles zu haben. In einem früheren Capitel (§. 280) sahen wir, dass B, wenn A fest ist, viel weniger Schall abgiebt, wie man zuerst aus dem entwickelten Drucke hätte erwarten können. Die Erklärung war die, dass die Phase des Druckes ungünstig war; der grössere Theil des letzteren wird nur dazu verwandt, die Trägheit der umgebenden Luft zu überwinden und ist bei der Leistung von Arbeit unwirksam. Nun ist der Druck, welcher A in Bewegung setzt, der ganze Druck und nicht allein der unbedeutende Theil, welcher von selbst Arbeit leisten würde. Die Bewegung von A wird durch die Bedingung bestimmt, dass diejenige Componente des ganzen auf A wirkenden Druckes, welche die Phase der Geschwindigkeit hat, verschwinden soll. Von dem Drucke, der von der Bewegung von A herrührt, hat aber der grössere Theil die Phase der Beschleunigung; und daher erfordert die vorgeschriebene Bedingung eine Gleichheit zwischen der kleinen Componente des von der Bewegung von A herrührenden Druckes und einem Drucke, der vergleichbar ist mit der grossen Componente der von der Bewegung von B herrührenden Bewegung. Das Resultat ist das, dass A eine viel kräftigere Quelle wird wie B. Natürlich wird durch den Kolben A keine Arbeit geleistet. Die Wirkung desselben besteht darin, die bei B gethane Arbeit zu vermehren, indem er die sonst ungünstige Relation zwischen den Phasen des Druckes und der Geschwindigkeit ändert.

Die unendlich grosse Ebene in der vorhergehenden Auseinandersetzung ist nur erforderlich, um hinter ihr Raum für unsere Maschinerie von Federn zu finden. Wenn wir uns mit noch mehr idealisirten Quellen und Resonatoren begnügen, so

können wir jener entbehren. Jedem Kolben muss ein Duplicat hinzugefügt werden, das in gleicher Weise aber nach der entgegengesetzten Richtung hin arbeitet; die Wirkung desselben ist: die Normalgeschwindigkeit des Fluidums auf der Ebene AB verschwinden zu lassen. Unter diesen Umständen hat die Ebene keinen Einfluss und kann entfernt werden. Wird die Grösse der Platte ohne Grenzen reducirt, so wird dieselbe schliesslich einfachen Quellen von Fluidum äquivalent; wir schliessen, dass eine einfache Quelle B in dem Verhältnisse $1 : \varkappa c$ wirksamer wie vorher werden wird, wenn in einer kleinen Entfernung c von derselben ein einfacher Resonator (wie wir ihn nennen können) von gleicher Tonhöhe in Wirksamkeit treten kann, das ist eine Quelle, bei welcher die Trägheit des unmittelbar umgebenden Fluidums durch irgend eine gleichwerthige Maschinerie ersetzt, und welche nur durch äussere Ursachen in Bewegung gesetzt wird.

Bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse über den Mechanismus von schwingenden Fluida ist, so lange als die Schwierigkeiten der Ableitung noch zum grössten Theile zu überwinden sind, jede Vereinfachung der Bedingungen, welche einen Fortschritt zu machen erlaubt, ohne den praktischen Charakter der Frage ganz zu zerstören, ein Schritt von grosser Wichtigkeit. Der Art war z. B. die Einführung der Idee einer auf einen Punkt concentrirten Quelle durch Helmholtz, welche Quelle analytisch durch die Verletzung der Continuitätsgleichung in diesem Punkte dargestellt wurde. Auf gleiche Weise kann vielleicht die Idee eines einfachen Resonators vortheilhaft sein, wenn es auch noch unmöglicher sein dürfte, einen solchen zu construiren, wie eine einfache Quelle.

320. Wir sahen, dass eine bedeutende Verstärkung des Schalles stattfindet, wenn sich ein passend abgestimmter Resonator nahe einer einfachen Quelle befindet. Noch viel mehr ist dieses der Fall, wenn die Schallquelle zusammengesetzt ist. Das von einer Doppelquelle herrührende Potential lautet (§§. 294, 324):

$$r\psi = \mu e^{-i\varkappa r}\left(1 + \frac{1}{i\varkappa r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Befindet sich der Resonator in einer kleinen Entfernung c, so haben wir:

$$\psi_0 = \mu_0 \frac{e^{-i\varkappa c}}{i\varkappa c^2},$$

und daher lautet das von dem Resonator herrührende Potential in der Entfernung r':

$$\varphi = \mu_0 \frac{e^{-i\varkappa c}}{i\varkappa c^2} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r'}}{i\varkappa r'} = \mu_0 \frac{e^{-i\varkappa c}}{i^2\varkappa^2 c^2} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r'}}{r'} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Verschwindet μ_0, so ist der Resonator ohne Wirkung. Wenn aber $\mu_0 = \pm 1$, d. h., wenn der Resonator auf der Axe der Doppelquelle liegt, so haben wir:

$$\varphi = \mp \frac{e^{-i\varkappa c}}{\varkappa^2 c^2} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r'}}{r'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

In einiger Entfernung von der Doppelquelle lautet ihr Potential:

$$\psi = \mu \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wir dürfen demnach die Sachlage so auffassen, dass das von dem Resonator herrührende Potential in dem Verhältnisse $\varkappa^2 c^2 : 1$ grösser wie das von der Doppelquelle herrührende ist. Die Winkeländerung wird hierbei vernachlässigt.

Eine schwingende, starre Kugel giebt der umgebenden Luft dieselbe Art von Bewegung wie eine in ihrem Mittelpunkte gelegene Doppelquelle. Die durch diese Thatsache empfohlene Substitution ist aber nur zulässig, wenn der Radius der Kugel klein im Vergleich zu c ausfällt; sonst modificirt die Gegenwart der Kugel die Thätigkeit des Resonators. Nichtsdestoweniger zeigt uns die vorhergehende Untersuchung, wie kräftig im Allgemeinen die Wirkung eines Resonators ist, welcher in einer zweckmässigen Lage nahe einer zusammengesetzten Schallquelle liegt, deren Charakter der Art ist, dass sie von selbst in einiger Entfernung nur geringe Wirkung hervorrufen würde.

Eins der besten Beispiele von dieser Benutzung eines Resonators wird durch einen schwingenden Glas- oder Metallstab, der in den Knotenpunkten festgehalten wird, geliefert. Ein Streifen Spiegelglas, ungefähr 30 cm lang und 2,5 cm breit von mittlerer Dicke (etwa 3 mm), der ungefähr 7,5 cm von den Enden mittelst einer rund um ihn geschlungenen Schnur gehalten wird, eignet sich sehr gut zu diesem Zwecke. Schlägt man denselben mit einem Hammer an, so giebt er nur einen geringen Schall mit Ausnahme der Obertöne, und selbst diese kann man durch Wahl eines Hammers von zweckmässiger Weiche des Anschlages los werden. Diese Schwäche des Schalles ist eine Folge der kleinen Dimensionen des Stabes im Vergleich zur Wellenlänge, welche die leichte Uebertragung der Luft von der einen Seite zur anderen erlaubt. Wird nun der Mund eines Resonators von richtiger Höhe [1]) über das eine der freien Enden gehalten, so kann durch einen gut geführten Schlag ein Schall von beträchtlicher Stärke und Reinheit erhalten werden. Auf diese Weise lässt sich eine vervollkommnetere Glasharmonika construiren mit viel tieferen Tönen, als ohne Resonator praktisch zu erlangen sind. Bei den gewöhnlichen Instrumenten sind die Wellenlängen hinreichend klein, um dem Stabe zu gestatten, der Luft unabhängig (von dem Resonator) Schwingungen zu ertheilen.

Die Verstärkung des Schalles einer Glocke in einem wohlbekannten Versuche von Savart [2]) ist ein Beispiel für eine Wirkung derselben Art. Das schlagendste Beispiel liefert aber vielleicht das von Helmholtz bei seinen Versuchen, welche reine Töne erforderten, adoptirte Arrangement. Hierbei werden Stimmgabeln über den Mund von Resonatoren gehalten.

---

[1]) Um die beste Wirkung zu erhalten, muss der Mund des Resonators sehr nahe an dem Stabe liegen; dann ist die Tonhöhe entschieden geringer, als sie in der freien Luft sein würde. Die letzte Adjustirung kann durch Veränderung des Betrages der Hemmung gemacht werden. Dieser Gebrauch von Resonatoren ist sehr alt.

[2]) Ann. d. Chim. t. XXIV, 1823.

321. Stehen zwei einfache Resonatoren A_1, A_2, die einzeln im Einklange mit der Quelle sind, nahe bei einander, so ist ihre Wirkung geringer, als wenn nur einer vorhanden wäre. Sind die von resp. A_1 und A_2 herrührenden Potentiale φ_1 und φ_2, so dürfen wir setzen:

$$\varphi_1 = A_1 \frac{e^{-i\kappa r_1}}{r_1}, \quad \varphi_2 = A_2 \frac{e^{-i\kappa r_2}}{r_2}.$$

Es möge R die Entfernung $A_1 A_2$ und ψ_1, ψ_2 die Potentiale darstellen, welche in A_1, A_2 existiren würden, wenn dort keine Resonatoren wären. Dann sind die zur Bestimmung von A_1, A_2 dienenden Bedingungen nach (7) §. 319:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 + \frac{A_2}{R} &= + i\kappa A_1 \\ \psi_2 + \frac{A_1}{R} &= + i\kappa A_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Nach Annahme sind ψ_1 und ψ_2 nahezu einander gleich, und daher:

$$A_1 = A_2 = \frac{R}{-1 + i\kappa R} \psi \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Da $i\kappa R$ klein ist, so wird die Wirkung viel geringer sein, als wenn nur ein Resonator vorhanden wäre. Man muss indessen bemerken, dass die verringerte Wirksamkeit davon herrührt, dass die Resonatoren sich gegenseitig ausser Stimmung bringen; wird dieses Bestreben durch eine Aenderung in der Federkraft compensirt, so hat eine beliebige Anzahl von neben einander befindlichen Resonatoren gerade die Wirkung eines einzigen. Dieser Punkt wird durch §. 302 illustrirt, aus welchem ersichtlich ist (32), dass, wenn auch die Resonanz nicht von der Grösse der Platte abhängt, doch die Trägheit der Luft, welche durch eine Federkraft compensirt werden muss, von dieser Grösse abhängig ist.

322. Es wird angebracht sein, an dieser Stelle einige Worte über einen Einwand zu sagen, den Bosanquet[1]) vor-

[1]) Phil. Mag. Aug. 1877, p. 125.

gebracht hat in dem Sinne, dass durch denselben die gewöhnlichen Berechnungen der Tonhöhe von Resonatoren und die Berechnung der Länge der Orgelpfeifen möglicher Weise hinfällig gemacht werden. Wenn ein Fluidum in einem stationären Strome durch eine Oeffnung in einer dünnen Platte hindurchfliesst, so hat die Bewegung auf der Seite von geringerem Drucke keineswegs den in §. 306 untersuchten Charakter. Anstatt nach Durchgang durch das Loch zu divergiren in der Weise, dass es der Oberfläche der Platte folgt, formt sich das Fluidum von selbst in einen annähernd cylindrischen Strahl, dessen Gestalt sich für zwei Dimensionen aus Formeln, die Kirchhoff[1]) gegeben hat, bestimmen lässt. Auf der Seite des grösseren Druckes weicht die Bewegung nicht so viel von der durch das elektrische Gesetz bestimmten ab. Auf gleiche Weise fährt ein Fluidum, welches aus einer Pfeife nach aussen strömt, fort, sich in einem cylindrischen Strome zu bewegen. Ist der äussere Druck grösser, so wird der Charakter der Bewegung ein anderer. In diesem Falle convergiren die Stromlinien von allen Richtungen nach dem Munde der Pfeife, nachher sammeln sie sich in ein paralleles Bündel, dessen Querschnitt beträchtlich kleiner wie der der Pfeife ist. Es liegt auf der Hand, dass, wenn die Bildung von Strahlen während des Durchganges der Luft durch den Mund des Resonators in einer irgendwie beträchtlichen Ausdehnung stattfindet, dass dann unsere Berechnungen der Tonhöhe ernstlich modificirt werden müssten.

Die Aufstellung der genauen Bedingungen, unter welchen Strahlen gebildet werden, ist ein sehr delicater Gegenstand. Man kann selbst bezweifeln, ob dieselben überhaupt in einem reibungslosen Fluidum entstehen, welches sich mit so kleinen Geschwindigkeiten bewegt, dass die entsprechenden Drucke, die proportional den Quadraten der Geschwindigkeiten sind, unbeträchtlich werden. Bei Luft aber, in dem Zustande, wie sie uns thatsächlich entgegentritt, muss, wenn sie sich unter den in Resonatoren vorgefundenen Drucken bewegt, zugegeben

[1]) Phil. Mag. Dec. 1876.

werden, dass manchmal Strahlen entstehen können. Ich bemerkte, während ich etwa vor zwei Jahren mit einem der König'schen Messingresonatoren von der Höhe c' experimentirte, dass, wenn die entsprechende Gabel, stark angeschlagen, an den Mund gehalten wurde, ein Wind von beträchtlicher Stärke aus der warzenförmigen Oeffnung auf der entgegengesetzten Seite herauskam. Diese Wirkung kann bis zu solcher Intensität gesteigert werden, dass dadurch eine Kerze, auf deren Docht der Strom gerichtet ist, ausgeblasen wird. Sie hängt von keiner besonderen Bewegung der Luft nahe den Enden der Gabel ab, wie man beweisen kann, wenn man die Gabel auf ihrem Resonanzkasten befestigt und das offene Ende des letzteren, anstatt das Ende der Gabel selbst, dem Munde des Resonators gegenüberhält. Hierbei wird dieselbe Wirkung mit nur wenig verminderter Intensität erreicht. Ein gleiches Resultat wurde mit einer Gabel und einem Resonator gewonnen, dessen Tonhöhe eine Octave tiefer war (c). Eine nähere Untersuchung brachte die Thatsache ans Licht, dass an den Seiten der warzenförmigen Oeffnung der nach aussen fliessende Strom durch einen in der entgegengesetzten Richtung ersetzt wurde, so dass die Flammenzunge einer zweckmässig aufgestellten Kerze zur selben Zeit in die betreffende Oeffnung hineinzugehen schien, in welcher eine andere unmittelbar vor der Oeffnung befindliche Kerze weggeblasen wurde. Die zwei Wirkungen geschehen natürlich in Wirklichkeit alternirend und scheinen bloss gleichzeitig zu sein wegen der Unfähigkeit des Auges, so raschen Aenderungen zu folgen. Die Bildung von Strahlen muss einen bedeutenden Einfluss auf die Energie der Bewegung haben, und das ist zweifellos der Grund, warum es nothwendig ist, die warzenförmige Oeffnung zu schliessen, um von einem Resonator dieser Form einen kräftigen Schall zu erhalten, wenn demselben eine passend abgestimmte Gabel gegenüber gehalten wird.

Zu gleicher Zeit scheint es nicht wahrscheinlich zu sein, dass eine Bildung von Strahlen an den Mundöffnungen der Resonatoren bei ihrem gewöhnlichen Gebrauche in irgend einer nennenswerthen Ausdehnung eintritt. Die nahe Uebereinstim-

mung zwischen der beobachteten und der berechneten Tonhöhe ist meist ein hinreichender Beweis hierfür. Ein anderes Argument, das auf denselben Schluss zielt, kann aus der Beständigkeit der freien Schwingungen von Resonatoren (§. 311) genommen werden, deren Dauer irgend eine beträchtliche Ursache zur Zerstreuung ausser der Mittheilung von Bewegung an die umgebende Luft auszuschliessen scheint.

Bei Orgelpfeifen, bei denen die Schwingungen sehr kräftig sind, haben diese Argumente weniger zwingende Kraft. Ich sehe aber keinen Grund zu der Annahme, dass die Bewegung an dem oberen Ende sehr von der bei der Helmholtz'schen Berechnung vorausgesetzten abweicht. Mit Sicherheit lässt sich, wie ich glaube, aus der Erscheinung der stationären Bewegung kein Grund für das Gegentheil ziehen. In dem extremen Falle nach der entgegengesetzten Seite, dem einer Impulsbewegung, können Strahlen sicherlich nicht gebildet werden, wie aus dem Thomson'schen Principe der kleinsten Energie (§. 79) folgt, und es ist zweifelhaft, welchem Extreme der Fall von periodischer Bewegung mit dem grössten Anschein von Uebereinstimmung verglichen werden kann. Beobachtungen nach der Methode der intermittirenden Beleuchtung (§. 42) dürften zu weiterer Belehrung über diesen Gegenstand führen.

Capitel XVII.

Anwendungen der Laplace'schen Functionen.

323. Die allgemeine Gleichung eines Geschwindigkeitspotentiales nimmt, wenn sie auf Polarcoordinaten bezogen wird, folgende Form an (§. 241):

$$r^2 \frac{d^2 \psi}{dr^2} + 2r \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{d\psi}{d\vartheta}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{d^2\psi}{d\omega^2} + \varkappa^2 r^2 \psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Verschwindet $\varkappa$, so haben wir die Gleichung des gewöhnlichen Potentiales, welche, wie bekannt, erfüllt wird, wenn $\psi = r^n S_n$, worin S_n die harmonische Kugelflächenfunction [1]) von der Ordnung n bedeutet. Durch Einsetzung dieses Werthes ergiebt sich, dass die von S_n zu erfüllende Gleichung lautet:

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dS_n}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{d^2 S_n}{d\omega^2} + n(n+1) S_n = 0 \ldots (2).$$

Welches nun auch die Form von ψ sein mag, das letztere wird sich stets in eine Reihe von Kugelfunctionen entwickeln lassen:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n + \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin ψ_n eine Gleichung von der Art wie (2) erfüllt.

---

[1]) Ueber die Theorie dieser Functionen sind die neuesten englischen Werke: Todhunter's The Functions of Laplace, Lamé, und Bessel, und Ferrers' Spherical Harmonics.

Vergleichen wir (1) und (2), so sehen wir, dass wir zur Bestimmung von ψ_n als eine Function von r haben:

$$r^2 \frac{d^2 \psi_n}{dr^2} + 2r \frac{d\psi_n}{dr} - n(n+1)\psi_n + \varkappa^2 r^2 \psi_n = 0;$$

oder, wie wir auch schreiben dürfen:

$$\frac{d^2(r\psi_n)}{d(\varkappa r)^2} - \frac{n(n+1)}{(\varkappa r)^2}(r\psi_n) + r\psi_n = 0 \quad . \; . \; . \quad (4).$$

Um diese Gleichung zu lösen, mag beachtet werden, dass wenn r sehr gross ist, das mittlere Glied vergleichsweise vernachlässigt werden darf, und dass dann die Lösung lautet:

$$r\psi_n = Ae^{i\varkappa r} + Be^{-i\varkappa r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Dieselbe Form kann als gültig für die vollständige Gleichung (4) angesehen werden, wenn wir A und B nicht länger als Constante, sondern als Functionen von r, deren Natur zu bestimmen ist, betrachten. Setzen wir diesen Werth in (4) ein, so ergiebt sich für B:

$$-\frac{d^2 B}{d(i\varkappa r)^2} + 2\frac{dB}{d(i\varkappa r)} + \frac{n(n+1)}{(i\varkappa r)^2} B = 0 \; . \; . \; . \quad (6).$$

Wir wollen nehmen:

$$B = B_0 + B_1(i\varkappa r)^{-1} + B_2(i\varkappa r)^{-2} + \ldots + B_s(i\varkappa r)^{-s} + \ldots (7),$$

und dieses in (6) einsetzen. Durch Verschwindenlassen von $(i\varkappa r)^{-s-2}$ wird erhalten:

$$B_{s+1} = B_s \frac{n(n+1) - s(s+1)}{2(s+1)}$$

$$= B_s \frac{(n-s)(n+s+1)}{2(s+1)} \quad . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Daher:

$$B_1 = \frac{n(n+1)}{2} B_0,$$

$$B_2 = B_1 \frac{(n-1)(n+2)}{2\,.\,2} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\,.\,4} B_0, \text{ etc.,}$$

so dass:

$$B = B_0 \left\{1 + \frac{n(n+1)}{2\,.\,i\varkappa r} + \frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2\,.\,4\,(i\varkappa r)^2} + \frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,(i\varkappa r)^3} \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2n}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n\,.\,(i\varkappa r)^n}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Bezeichnen wir nach Prof. Stokes[1]) die Reihen innerhalb der Klammern mit $f_n(i\varkappa r)$, so erhalten wir:

$$B = B_0 f_n(i\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich durch Aenderung des Vorzeichens von i:

$$A = A_0 f_n(-i\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die Symbole A_0 und B_0 sind, wenn auch unabhängig von r, Functionen der Winkelcoordinaten. In dem allgemeinsten Falle sind dieselben irgend zwei Kugelflächenfunctionen von der Ordnung n. Gleichung (5) lässt sich demnach schreiben:

$$r\psi_n = S_n e^{-i\varkappa r} f_n(i\varkappa r) + S_n' e^{+i\varkappa r} f_n(-i\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Durch Differention von (12) ergiebt sich:

$$\frac{d\psi_n}{dr} = -\frac{S_n}{r^2} e^{-i\varkappa r} F_n(i\varkappa r) - \frac{S_n'}{r^2} e^{+i\varkappa r} F_n(-i\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

worin:

$$F_n(i\varkappa r) = (1 + i\varkappa r) f_n(i\varkappa r) - i\varkappa r\, f_n'(-i\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Die Formen der Functionen F bis $n = 7$ sind in der folgenden Tabelle angegeben:

$$F_0(y) = y + 1$$
$$F_1(y) = y + 2 + 2y^{-1}$$
$$F_2(y) = y + 4 + 9y^{-1} + 9y^{-2}$$
$$F_3(y) = y + 7 + 27y^{-1} + 60y^{-2} + 60y^{-3}$$
$$F_4(y) = y + 11 + 65y^{-1} + 240y^{-2} + 525y^{-3} + 525y^{-4}$$
$$F_5(y) = y + 16 + 135y^{-1} + 735y^{-2} + 2625y^{-3} + 5670y^{-4} + 5670y^{-5}$$
$$F_6(y) = y + 22 + 252y^{-1} + 1890y^{-2} + 9765y^{-3} + 34020y^{-4} + 72765y^{-5} + 72765y^{-6}$$
$$F_7(y) = y + 29 + 434y^{-1} + 4284y^{-2} + 29925y^{-3} + 148995y^{-4} + 509355y^{-5} + 1081080y^{-6} + 1081080y^{-7}.$$

[1]) On the Communication of Vibration from a Vibrating Body to a surrounding Gas. Phil. Trans. 1868.

Um die Hauptglieder in $F_n(i\varkappa r)$ zu finden, wenn $i\varkappa r$ klein ist, haben wir nach Umkehr der Reihe in (9):

$$f_n(i\varkappa r) = 1.3.5\dots(2n-1)\,(i\varkappa r)^{-n}\left\{1 + i\varkappa r + \frac{n-1}{2n-1}(i\varkappa r)^2 + \dots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

woraus sich nach (14) ergiebt:

$$F_n(i\varkappa r) = 1.3.5\dots(2n-1)\,(n+1)\,(i\varkappa r)^{-n} \times \left\{1 + i\varkappa r + \frac{n^2(i\varkappa r)^2}{(n+1)(2n+1)} + \dots\right\}\dots(16).$$

324. Ein wichtiger Fall unserer allgemeinen Formeln tritt dann ein, wenn ψ eine Störung darstellt, welche ganz nach aussen fortgepflanzt ist. In einem grossen Abstande von dem Ursprunge haben wir $f_n(i\varkappa r) = f_n(-i\varkappa r) = 1$ und daher, wenn wir den Zeitfactor ($e^{i\varkappa at}$) wiederherstellen:

$$r\psi_n = S_n e^{i\varkappa(at-r)} + S_n' e^{i\varkappa(at+r)} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

deren zweiter Theil eine nach innen fortschreitende Störung darstellt. Unter den betrachteten Umständen haben wir deshalb $S_n' = 0$ zu setzen und daher:

$$r\psi_n = S_n f_n(i\varkappa r)\, e^{i\varkappa(at-r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Diese Gleichung stellt in der allgemeinsten Weise die $n$te harmonische Componente einer Störung von gegebener Periode dar, welche nach aussen in den unendlichen Raum diffundirt.

Der Ursprung der Störung kann in einer vorgeschriebenen Normalbewegung der Oberfläche einer Kugel vom Radius c bestehen. Wir wollen annehmen, dass in irgend einem Punkte auf der Kugel die Geschwindigkeit nach aussen durch $U e^{i\varkappa at}$ dargestellt wird, wo U im Allgemeinen eine Function der Lage des betrachteten Punktes ist.

Wird U in einer Reihe von Kugelfunctionen entwickelt:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (3),$$

so müssen wir nach (13) §. 323 haben:

$$U_n = -\frac{S_n}{c^2}\, e^{-i\varkappa c} F_n(i\varkappa c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Der vollständige Werth von ψ ist daher:

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{i\kappa(at-r+c)} \Sigma \frac{U_n}{F_n(i\kappa c)} f_n(i\kappa r) \ldots (5),$$

worin die Summation über alle (ganzen) Werthe von n auszudehnen ist. Der reelle Theil dieser Gleichung stellt das Geschwindigkeitspotential dar, welches von der Normalgeschwindigkeit $U \cos \kappa a t$[1]) an der Oberfläche der Kugel $r = c$ herrührt.

Prof. Stokes hat diese Lösung auf die Erklärung eines bemerkenswerthen Versuches von Leslie angewandt, nach welchem es scheint, als wenn der Schall einer Glocke, welche in einem zum Theil luftleer gemachten Recipienten schwingt, durch die Einführung von Wasserstoff verringert wird. Diese paradoxe Erscheinung hat ihren Grund in der durch die Einführung des Wasserstoffes bewirkten Vergrösserung der Wellenlänge, kraft deren die Glocke ihren Halt (so zu sagen) in dem umgebenden Gase verliert. Die allgemeine Erklärung kann nicht besser wie mit den Worten von Prof. Stokes gegeben werden:

„Nehmen wir an, ein Mensch bewege seine Hand durch einen kleinen Raum hin und zurück. Die Bewegung, welche in der Luft hervorgerufen wird, ist meistens genau dieselbe, welche sie sein würde, wenn die Luft ein incompressibles Fluidum gewesen wäre. Es ist eine rein locale, hin und her gehende Bewegung vorhanden, bei welcher die Luft unmittelbar vor der Hand vorwärts gestossen und die unmittelbar hinter der Hand hinter den sich bewegenden Körper gedrängt wird, wobei in dem vorderen Raume die Luft im Allgemeinen vor dem Angriffe des sich bewegenden Körpers zurückweicht und in dem hinteren Raume im Allgemeinen von allen Seiten herbeifliesst, um das Vacuum, welches sich zu bilden sucht, wieder

---

[1]) Die Annahme eines reellen Werthes für U ist gleichbedeutend mit der Begrenzung der Normalgeschwindigkeit auf den Fall, wo dieselbe auf der ganzen Kugel $r = c$ überall dieselbe Phase hat. Um die allgemeinste Bewegung der Luft zu umfassen, muss U als complex behandelt werden.

auszufüllen; in den seitlichen Richtungen ist daher der Strom des Fluidums rückwärts gerichtet, indem ein Theil des Ueberschusses an Fluidum vorn den Mangel an Fluidum hinten zu ersetzen sucht. Nun denken wir uns die Schwingungsdauer der Bewegung continuirlich vermindert. Allmälig wird die Aenderung der Bewegung zu rasch um das vollständige Eintreten der rein localen reciproken Bewegung zu gestatten. Die Luft wird merklich comprimirt und verdünnt, und eine merkliche Schallwelle (oder Welle von derselben Art in dem Falle, wo die Schwingungsdauer jenseits der Grenzen für die Hörbarkeit liegt) pflanzt sich in die Entfernung fort. Dasselbe findet in jedem Gase statt; je schneller die Fortpflanzung der Verdichtungen und Verdünnungen in dem Gase geschieht, desto mehr wird sich dasselbe in Hinsicht der uns vorliegenden Bewegungen der Bedingung eines incompressiblen Fluidums nähern, desto mehr werden die Bedingungen der Verschiebung des Gases an der Oberfläche des festen Körpers durch einen rein localen reciproken Strom erfüllt."

Bei der Discussion der Lösung (5) fährt Prof. Stokes folgendermaassen fort:

„In einer grossen Entfernung von der Kugel wird die Function $f_n(i \varkappa r)$[1]) schliesslich gleich 1, und wir haben:

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{i\varkappa(at - r + c)} \Sigma \frac{U_n}{F_n(i \varkappa c)} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

„Es ergiebt sich $\left(\text{aus dem Werthe von } \frac{d\psi}{dr}\right)$, dass die Componente der Geschwindigkeit längs des Radiusvectors von der Ordnung r^{-1} und in jeder Richtung senkrecht zu dem Radiusvector von der Ordnung r^{-2} ist, so dass die seitliche Bewegung, ausgenommen in der Nachbarschaft der Kugel, gering angeschlagen werden kann.

„Um den Einfluss der seitlichen Bewegung in der Nachbarschaft der Kugel zu untersuchen, wollen wir die wirkliche Störung in einer grossen Entfernung mit der vergleichen, welche vorhan-

---

[1]) Ich habe in den Benennungen von Prof. Stokes einige kleine Aenderungen vorgenommen.

den wäre, wenn jede seitliche Bewegung verhindert würde etwa durch unendlich dünne conische Theilungen, die das Fluidum in elementare Canäle theilen, von welchen jeder durch eine conische Fläche begrenzt wird, deren Spitze im Centrum liegt.

„Unter dieser Voraussetzung wird die Bewegung in jedem Canale sichtlich dieselbe sein, wie sie nach allen Richtungen sein würde, wenn die Kugel durch Zusammenziehung und Ausdehnung der Oberfläche schwingt, ferner rings herum dieselbe und von der Art, dass die Normalgeschwindigkeit der Oberfläche dieselbe wäre, wie sie in den einzelnen Punkten ist, in denen der fragliche Canal an die Oberfläche anstösst. Wenn nun U constant wäre, so würde die Entwickelung von U auf ihr erstes Glied U_0 reducirt; indem wir beobachten, dass $f_0(i\varkappa r) = 1$, würden wir dann aus (5) haben:

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{i\varkappa(at-r+c)} \frac{U_0}{F_0(i\varkappa c)}.$$

Dieser Ausdruck ist auf jeden einzelnen Canal anwendbar, wenn wir U_0 in dem Sinne nehmen, dass dasselbe die Normalgeschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel für diesen betreffenden Canal bedeutet. Um daher einen Ausdruck zu erhalten, der sich auf einmal auf alle Canäle anwenden lässt, haben wir nur U für U_0 zu schreiben. Ich werde indessen zur Erleichterung der Vergleichung von (5) und (6) ΣU_n für U schreiben. Wir haben dann:

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{i\varkappa(at-r+c)} \frac{\Sigma U_n}{F_0(i\varkappa c)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Man muss daran denken, dass dieses lediglich ein Ausdruck ist, der sich auf einmal auf alle Canäle anwenden lässt, bei welchen in jedem die Bewegung ganz längs des Radiusvectors geschieht; und dass demgemäss der Ausdruck bei der Absicht, die Transversalschwingung zu finden, nicht mit Bezug auf ϑ oder ω zu differentiren ist.

„Vergleichen wir (7) mit dem Ausdrucke (6) für die Function ψ bei der wirklichen Bewegung in einer grossen Entfernung von der Kugel, so sehen wir, dass diese Ausdrücke identisch

sind mit der Ausnahme, dass U_n durch zwei verschiedene Constanten dividirt wird, nämlich $F_0(i\varkappa c)$ in dem ersten Falle und $F_n(i\varkappa c)$ in dem letzten. Dasselbe ist richtig für die Hauptglieder (oder die von der Ordnung r^{-1}) in den Ausdrücken für die Verdichtung und Geschwindigkeit. Wenn daher die Art der Schwingung der Kugel so ist, dass die Normalgeschwindigkeit ihrer Oberfläche durch eine Laplace'sche Function irgend welcher Ordnung ausgedrückt wird, so ändert sich die Störung in einer grossen Entfernung von der Kugel von einer Richtung zur anderen nach demselben Gesetze, als wenn seitlichen Bewegungen vorgebeugt wäre, indem die Amplitude des Ausschlages in einer bestimmten Entfernung vom Centrum sich in beiden Fällen wie die Amplitude des Ausschlages der Oberfläche der Kugel selbst in einer normalen Richtung ändert. Die einzige Differenz ist die durch das symbolische Verhältniss $F_n(i\varkappa c) : F_0(i\varkappa c)$ ausgedrückte. Nehmen wir an, dass $F_n(i\varkappa c)$ auf die Form $\mu_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$ reducirt wird, so verhält sich die Amplitude der Schwingung in dem wirklichen Falle zu der in dem angenommenen wie μ_0 zu μ; die Phasen in den beiden Fällen werden um $\alpha_0 - \alpha_n$ von einander abweichen.

„Wenn die Normalgeschwindigkeit der Kugeloberfläche nicht durch eine einzige Laplace'sche Function, sondern nur durch eine Reihe, endliche oder unendliche, derartiger Functionen ausdrückbar ist, so wird sich die Störung in einer gegebenen grossen Entfernung von dem Mittelpunkte von einer Richtung zur anderen nicht länger nach demselben Gesetze wie die Normalgeschwindigkeit der Kugeloberfläche selbst ändern, da der Modul μ_n und gleicher Weise die Amplitude α_n der imaginären Grösse $F_n(i\varkappa c)$ sich mit der Ordnung der Function ändert.

„Wir wollen nun annehmen, dass die Störung durch eine Laplace'sche Function von irgend einer Ordnung ausgedrückt wird und den numerischen Werth der von der seitlichen thatsächlich existirenden Bewegung hervorgerufenen Aenderung der Intensität an entfernten Orten suchen.

„Die Intensität wird durch in einer bestimmten Zeit erzeugte lebendige Kraft gemessen und wird sich demzufolge wie das Product aus Dichtigkeit und Fortpflanzungsgeschwindigkeit, multiplicirt mit dem Quadrate der Schwingungsamplitude, ändern. Der letzte Factor allein bildet den Unterschied von dem, was eintreten würde, wenn keine seitliche Bewegung vorhanden wäre. Die Amplitude ist in dem Verhältnisse von μ_0 zu μ geändert, so dass, wenn $\mu_n^2 : \mu_0^2 = I_n$, dieses I_n die Grösse darstellt, durch welche die Intensität, welche existirt haben würde, falls das Fluidum an seitlicher Bewegung gehindert wäre, zu dividiren ist.

„Bedeutet λ die Länge der der Schwingungsdauer entsprechenden Schallwelle, so ist $\varkappa = 2\pi\lambda^{-1}$, so dass $\varkappa c$ das Verhältniss des Umfanges der Kugel zur Länge einer Welle ist. Nehmen wir Luft und weiter λ zu 2 Fuss, was etwa 550 Schwingungen in einer Secunde entsprechen würde, und den Umfang $2\pi c$ zu 1 Fuss (eine Grösse und Tonhöhe, welche bei einer gewöhnlichen Hausglocke vorkommen), so werden wir haben $\varkappa c = \frac{1}{2}$. Die folgende Tabelle giebt die Werthe der Quadrate des Moduls und des Verhältnisses I_n für die Functionen $F_n(i\varkappa c)$ von den ersten fünf Ordnungen, für

$\varkappa c$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	
4	17	16,25	14,879	13,848	20,177	Werthe von μ_n^2
2	5	5	9,3125	80	1495,8	
1	2	5	89	3965	300137	
0,5	1,25	16,25	1330,2	236191	72086371	
0,25	1,0625	64,062	20878	14837899	18160×10^6	
4	1	0,95588	0,87523	0,81459	1,1869	Werthe von I_n
2	1	1	1,8625	16	299,16	
1	1	2,5	44,5	1982,5	150068	
0,5	1	13	1064,2	188953	57669097	
0,25	1	60,294	19650	13965×10^3	17092×10^6	

jeden der Werthe 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ von $\varkappa c$. Es wird sich sofort ergeben, warum die Tabelle in der Richtung der Werthe grösser wie $\frac{1}{2}$ weiter ausgedehnt wurde, wie es in der entgegengesetzten Richtung geschah. Fünf Hauptfälle sind wenigstens berücksichtigt.

„Ist $\varkappa c = \infty$, so erhalten wir aus den analytischen Ausdrücken $I_n = 1$. Wir sehen aus der Tabelle, dass, wenn $\varkappa c$ einigermaassen gross ist, I_n etwas kleiner wie 1 und demzufolge der Schall etwas intensiver sein muss, als wenn die seitliche Bewegung verhindert wäre. Die Möglichkeit hiervon ist zu erklären, wenn man beachtet, dass die Verdichtungswellen, welche sich von denjenigen Theilen der Kugel aus verbreiten, die in einem gegebenen Momente positiv d. i. nach aussen schwingen, sich nach Verlauf einer halben Periode über die benachbarten Theile ausgebreitet haben können, welche nun an der Reihe sind, positiv zu schwingen, so dass also diese letzteren Theile bei ihrer Bewegung nach aussen gegen einen etwas grösseren Druck arbeiten, als wenn diesem Theile nur die Schwingung des Gases, welche er selbst verursachte, entgegenstände. Dieselbe Erklärung lässt sich mutatis mutandis auf die Verdünnungswellen anwenden. Indessen ist die so durch die Existenz einer seitlichen Bewegung verursachte Steigerung der Intensität des Schalles nur klein, weil, wenn $\varkappa c$ einen etwas kleinen Werth hat, I_n enorm wächst, und der Schall dann ein reines Nichts wird verglichen mit dem, was eingetreten sein würde, wenn die seitliche Bewegung verhindert wäre.

„Je höher die Ordnung der Function ist, desto grösser wird die Anzahl der Theile sein, abwechselnd positiv und negativ in Bezug auf ihre Art in einem bestimmten Momente zu schwingen, in welche sich die Oberfläche der Kugel theilt. Wir sehen aus der Tabelle, dass sowohl für gegebene Schwingungsdauer wie für gegebenen Radius der Werth von I_n beträchtlich wird, wenn n einigermaassen hoch ist. Praktisch geschehen indessen Schwingungen dieser Art, wenn

die elastische Kugel nicht ihre Haupt-, sondern eine ihrer untergeordneten Schwingungen ausführt; die dieser entsprechende Tonhöhe steigt mit der Ordnungszahl der Schwingung, so dass $\varkappa$ mit dieser Ordnung wächst. Das war der Grund, weshalb die Tabelle von $\varkappa c = 0{,}5$ aus in die Richtung der höheren Töne weiter ausgedehnt wurde, wie in die der tieferen Töne, nämlich bis zu drei höheren und nur bis zu einer tieferen Octave.

„Wenn die Kugel symmetrisch um den Mittelpunkt schwingt, d. i. so, dass je zwei gegenüberliegende Punkte der Oberfläche sich in einem bestimmten Momente mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzten Richtungen bewegen, oder allgemeiner, wenn die Art der Schwingung so beschaffen ist, dass keine Aenderung in der Lage des Schwerpunktes des Volumens eintritt; wenn dieses der Fall ist, dann giebt es kein Glied von der Ordnung 1. Für eine wie eine Glocke schwingende Kugel ist die Hauptschwingung diejenige, welche durch ein Glied von der Ordnung 2 ausgedrückt wird; ich werde jetzt specieller auf diese eingehen.

„Setzen wir der Kürze halber $\varkappa^2 c^2 = q$, so haben wir:

$$\mu_0{}^2 = q + 1,$$

$$\mu_2{}^2 = \left(q^{\frac{1}{2}} + 9\,q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + (4 - 9\,q^{-1})^2 = q - 2 + 9\,q^{-1} + 81\,q^{-2},$$

$$I_2 = \frac{q^3 - 2\,q^2 + 9\,q + 81}{q^2\,(q + 1)}.$$

„Der Minimalwerth von I_2 wird bestimmt durch:

$$q^3 - 6\,q^2 - 84\,q - 54 = 0,$$

und das giebt angenähert:

$$q = 12{,}859, \quad \varkappa c = 3{,}586, \quad \mu_0{}^2 = 13{,}859, \quad \mu_2{}^2 = 12{,}049,$$

$$I_2 = 0{,}86941;$$

so dass die grösste Verstärkung des Schalles, welche durch seitliche Bewegung hervorgerufen wird, etwa 15 Procent beträgt.

„Ich komme jetzt specieller zu dem Leslie'schen Versuche. Ueber die Gestalt, Grösse oder Tonhöhe seiner Glocke ist nichts ausgesagt. Selbst wenn diese Dinge genau beschrieben wären, würde noch ein gut Theil Raum für Vermuthungen

in Betreff der Feststellung der Grösse derjenigen Kugel bleiben, welche als die beste Darstellerin der Glocke angesehen werden muss. Alles, was wir thun können, ist daher das, dass wir solche Werthe für $\varkappa$ und c wählen, welche mit den wahrscheinlichen Bedingungen des Versuches vergleichbar sind.

„Ich besitze eine Glocke, die zu einem alten pneumatischen Glockenapparate gehört, welche wahrscheinlich einigermaassen der von Leslie gebrauchten ähnlich sein mag. Sie ist nahezu halbkugelförmig, der Durchmesser beträgt 1,96 Zoll, die Tonhöhe ist eine Octave über dem mittleren c eines Pianino. Nehmen wir die Zahl der Schwingungen zu 1056 per Secunde und die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft zu 1100 Fuss per Secunde, so haben wir $\lambda = 12,5$ Zoll. Die Darstellung der Glocke durch eine Kugel von demselben Radius würde eine sehr grosse Unterschätzung des Einflusses der localen Circulation bedeuten, da das Gas nahe dem Munde nur einen kleinen Weg hat, um von aussen nach innen oder umgekehrt herumzukriechen. Die Darstellung durch eine Kugel mit dem halben Radius würde die Wirkung offenbar noch unterschätzen. Nichtsdestoweniger will ich, um den Einfluss der hier aufgefundenen Ursache lieber zu unterschätzen als zu übertreiben, diese zwei Annahmen nach einander machen und dazu für Luft resp. $c = 0,98$ und $c = 0,49$, $\varkappa c = 0,4926$ und $\varkappa c = 0,2463$ setzen.

„Ohne die seitliche Bewegung würde sich die Intensität von Gas zu Gas in dem Verhältnisse der Dichtigkeit zu der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ändern und daher auch in dem Verhältnisse des Druckes zu der Quadratwurzel der Dichtigkeit unter Normaldruck, wenn wir annehmen, dass der Factor, welcher von der Wärmeentwickelung abhängt, wirklich denselben Werth hat für die Gase und Gasgemische, mit denen wir zu thun haben. In der folgenden Tabelle giebt die erste Columne das Gas, die zweite den Druck in Atmosphären, die dritte die Dichte D unter dem Drucke p, bezogen auf die Dichte der Luft unter Atmosphärendruck als Einheit, die vierte, Q_r, giebt an, welches die Intensität gewesen wäre, wenn die Bewegung ganz radial sein würde, bezogen auf die Intensität in Luft unter Atmosphären-

Gas	p	D	Q_r	$c = 0,98$			$c = 0,49$		
				q	I_2	Q	q	I_2	Q
Luft	1	1	1	0,2427	1136	1	0,06067	20890	1
Wasserstoff	1	0,0690	0,2627	0,01674	284700	0,001048	0,004186	4604000	0,001191
Verdünnte Luft	0,01	0,01	0,01	0,2427	1136	0,01	0,06067	20890	0,01
Dieselbe gefüllt mit H	1	0,0783	0,2798	0,01900	220600	0,001440	0,004751	3572000	0,001637
Luft von derselben Dichte . .	0,0783	0,0783	0,0783	0,2427	1136	0,0783	0,06067	20890	0,0783
Luft verdünnt auf $\frac{1}{2}$	0,5	0,5	0,5	0,2427	1136	0,5	0,06067	20890	0,5
Dieselbe gefüllt mit H	1	0,5345	0,7311	0,1297	4322	0,1921	0,0324	74890	0,2039

druck als Einheit, oder in anderen Worten eine Grösse, die sich wie $p \times$ (der Dichte beim Drucke 1)$^{1/2}$ ändert. Dann folgen die Werthe von q, I_2 und Q, wovon die letzte Grösse die wirkliche wie vorher auf Luft bezogene Intensität ist.

„Eine Musterung der in den mit Q überschriebenen Columnen enthaltenen Zahlen wird zeigen, dass die hier untersuchte Ursache vollkommen ausreicht, den von Leslie erwähnten Thatsachen Rechnung zu tragen."

Die Wichtigkeit des Gegenstandes und die meisterhafte Art, in welcher derselbe von Prof. Stokes behandelt wurde, wird wahrscheinlich für genügend erachtet werden, um diesen langen Auszug zu rechtfertigen. Die Einfachheit der wahren Erklärung steht im bemerkenswerthen Gegensatze mit Vermuthungen, die vor derselben aufgestellt wurden. Sir J. Herschel z. B. dachte, dass die Mischung von zwei Gasen durch das Bestreben, den Schall mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortzupflanzen, eine Verwirrung hervorrufen würde, aus der eine rapide Dämpfung des Schalles resultirte.

325. Das Glied von der Ordnung Null:

$$\psi_0 = \frac{S_0}{r} e^{i\varkappa(at - r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

in welchem S_0 eine complexe Constante bedeutet, entspricht dem Potentiale einer einfachen Quelle von willkürlicher Intensität und Phase, die in dem Mittelpunkte der Kugel liegt (§. 279). Wenn, wie es oft in der Praxis vorkommt, die Schallquelle ein fester Körper ist, der ohne grosse Volumenänderung schwingt, so ist dieses Glied relativ einflusslos. Bei einer starren Kugel, welche um eine Gleichgewichtslage schwingt, ist die Einflusslosigkeit absolut[1]), insofern, als die ganze Bewegung dann durch ein Glied von der Ordnung 1 dargestellt wird; überhaupt muss das Glied von der Ordnung Null stets da, wo der Körper sehr klein im Vergleiche zu der Wellen-

[1]) Der Mittelpunkt der Kugel ist hierbei als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen.

länge ist, unbedeutend sein. Integriren wir nämlich die Bewegungsgleichung $\nabla^2 \psi + \varkappa^2 \psi = 0$ über das kleine Volumen, welches zwischen dem Körper und einer denselben eng umgebenden Kugel liegt, so sehen wir, dass die ganze Quantität Fluidum, welche in diesen Raum eintritt und ihn verlässt, klein ist, und dass daher nur ein kleiner totaler Strom quer gegen die Fläche der Kugel stattfindet.

Setzen wir $n = 1$, so erhalten wir für das Glied von der ersten Ordnung:

$$r\psi_1 = S_1 e^{i\varkappa(at-r)} \left\{1 + \frac{1}{i\varkappa r}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

und S_1 ist proportional dem Cosinus des Winkels zwischen der betrachteten Richtung und irgend einer festen Axe. Dieser Ausdruck hat dieselbe Form wie das Potential einer Doppelquelle (§. 294), die in dem Mittelpunkte gelegen und aus zwei gleichen und entgegengesetzten auf der fraglichen Axe liegenden Quellen zusammengesetzt ist, wobei der Abstand dieser Quellen von einander unendlich klein sein muss, und ihre Intensitäten der Art sind, dass das Product der Intensitäten und der Entfernung endlich ausfällt. Denn es liegt, wenn x die Axe und μ den Cosinus des Winkels zwischen x und r bedeutet, auf der Hand, dass das Potential der Doppelquelle proportional ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) = \mu \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\varkappa r}}{r}\right) = -i\varkappa \frac{\mu e^{-i\varkappa r}}{r}\left\{1 + \frac{1}{i\varkappa r}\right\}.$$

Es geht hieraus hervor, dass die von der Schwingung einer Kugel als ein starrer Körper herrührende Störung dieselbe ist, wie die, welche einer Doppelquelle in dem Mittelpunkte jener entspricht, deren Axe mit der Linie der Schwingung der Kugel übereinstimmt.

Die Reaction der Luft auf eine kleine Kugel, welche als ein starrer Körper mit einer harmonischen Bewegung schwingt, lässt sich aus den vorherstehenden Formeln leicht berechnen. Bezeichnet $\dot{\xi}$ die Geschwindigkeit der Kugel zur Zeit t, so ist:

$$U_1 e^{i\varkappa at} = \dot{\xi}\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

und daher haben wir für den Werth von ψ an der Oberfläche der Kugel, aus (5) §. 324:

$$\psi = - i\varkappa a c \dot{\xi} \mu \frac{f_1(i\varkappa c)}{F_1(i\varkappa c)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die von den Luftdrucken herrührende Kraft Ξ, welche die Bewegung beschleunigt, wird gegeben durch:

$$\Xi = -\int\int \mu \delta p \, dS = \varrho \int\int \mu \psi \, dS$$

$$= - i\varkappa a \varrho c^3 \dot{\xi} \frac{f_1(i\varkappa c)}{F_1(i\varkappa c)} \int 2\pi\mu^2 d\mu = - i\varkappa a \frac{4\pi c^3}{3} \varrho \dot{\xi} \frac{f_1(i\varkappa c)}{F_1(i\varkappa c)}.$$

Schreiben wir:

$$\frac{f_1(i\varkappa c)}{F_1(i\varkappa c)} = p - iq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

dann haben wir:

$$\Xi = - p \frac{4\pi c^3 \varrho}{3} \ddot{\xi} - q\varkappa a \frac{4\pi c^3 \varrho}{3} \dot{\xi} \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

insofern als:

$$\ddot{\xi} = i\varkappa a \dot{\xi}.$$

Die Wirkungsweise der Luft besteht daher darin, die wirksame Trägheit der Kugel um $p$mal der Trägheit der verschobenen Luft zu vermehren und die Bewegung zu verlangsamen durch eine Kraft, welche proportional der Geschwindigkeit und gleich $\frac{4}{3} \pi \varrho c^3 . q\varkappa a \dot{\xi}$ ist, wobei diese Wirkungen im Allgemeinen Functionen der Schwingungszahlen sind. Durch Einführung der Werthe von f_1 und F_1 finden wir:

$$\frac{f_1(i\varkappa c)}{F_1(i\varkappa c)} = \frac{2 + \varkappa^2 c^2 - i\varkappa^3 c^3}{4 + \varkappa^4 c^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

so dass:

$$p = \frac{2 + \varkappa^2 c^2}{4 + \varkappa^4 c^4}, \quad q = \frac{\varkappa^3 c^3}{4 + \varkappa^4 c^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Ist $\varkappa c$ klein, so haben wir angenähert $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4} \varkappa^3 c^3$. Daher wird die wirksame Trägheit einer kleinen Kugel um die Hälfte von der der verschobenen Luft vergrössert — eine Grösse, die unabhängig von der Schwingungszahl und dieselbe ist, als wenn das Fluidum incompressibel wäre. Das Zerstreuungsglied, welches der ausgesandten Energie entspricht,

ist von höherer Ordnung in $\varkappa c$ und daher werden (wenn man die Wirkungen der Viscosität nicht beachtet) die Schwingungen einer kleinen Kugel nur langsam gedämpft.

Die Bewegung eines Ellipsoides durch ein incompressibles Fluidum wurde von Green[1]) untersucht; sein Resultat lässt sich auf die Berechnung des von einem compressiblen Fluidum herrührenden Anwachsens der wirksamen Trägheit anwenden, vorausgesetzt, dass die Dimensionen des Körpers klein im Vergleich zu der Wellenlänge der Schwingung sind. Für eine kleine kreisförmige Scheibe, die unter rechten Winkeln zu ihrer Ebene schwingt, verhält sich das Anwachsen der wirksamen Energie zu der Masse einer Kugel des Fluidums, deren Radius gleich dem der Scheibe ist, wie 2 zu π. Das oben gegebene Resultat für den Fall einer Kugel wurde von Poisson[2]) erhalten kurze Zeit vor der Veröffentlichung der Green'schen Arbeit.

Maxwell[3]) hat bewiesen, dass man sich die verschiedenen Glieder der harmonischen Entwickelung des gewöhnlichen Potentiales als hervorgebracht von vielfachen Punkten von entsprechenden Graden von Complexität denken kann. Daher ist V_i proportional mit $\frac{d^i}{dh_1\, dh_2 \ldots dh_i}\left(\frac{1}{r}\right)$, worin i Differentiationen von r^{-1} mit Bezug auf die Axen h_1, h_2 etc. auftreten, bei denen jede beliebige Anzahl in besonderen Fällen zusammenfallen dürfen. Vielleicht hätte man erwarten können, dass ein ähnliches Gesetz für das Geschwindigkeitspotential mit der Ersetzung von $r^{-1}\, e^{-i\varkappa r}$ für r^{-1} gelten würde. Das ist indessen nicht der Fall. Es kann gezeigt werden, dass das Potential einer vierfachen Quelle, bezeichnet durch $\frac{d^2}{dh_1\, dh_2} \cdot \frac{e^{-i\varkappa r}}{r}$, im Allgemeinen nicht einfach dem Gliede von der zweiten Ordnung, das ist $S_2 \frac{e^{-i\varkappa r}}{r} f_2(i\varkappa r)$, entspricht, aber wohl einer

[1]) Edinburgh Transactions Dec. 16, 1833. Gleichfalls Green's Mathematical Papers, herausgegeben von Ferrers. Macmillan u. Co., 1877.

[2]) Mémoires de l'Académie des Sciences. Tom XI, p. 521.

[3]) Maxwell's Electricity and Magnetism. Ch. IX.

Combination dieses mit einem Gliede von der Ordnung Null. Die Analogie gilt also allein in dem einzelnen Falle des doppelten Punktes oder Quelle, obgleich natürlich die Function $r^{-1}e^{-i\varkappa r}$ nach jeder Anzahl von Differentiationen fortfährt, die Fundamentalgleichung:

$$(\nabla^2 + \varkappa^2)\,\psi = 0$$

zu erfüllen.

Vielleicht ist es erwähnenswerth, dass die Störung ausserhalb irgend einer imaginären Kugel, welche den Quell des Schalles vollständig einschliesst, sich so darstellen lässt, als rühre sie von der Normalbewegung der Oberfläche irgend einer kleineren concentrischen Kugel her, oder als ein besonderer Fall, wenn der Radius der Kugel unendlich klein ist, von einer Quelle, die im Centrum auf einen Punkt concentrirt ist. Diese Quelle wird im Allgemeinen aus einer Verbindung vielfacher Quellen von allen Ordnungen der Complexität zusammengesetzt sein.

326. Wenn der Ursprung der Störung in der Schwingung eines starren Körpers parallel zu seiner Umdrehungsaxe besteht, so reduciren sich die verschiedenen Kugelfunctionen S_n auf einfache Multipla der einaxigen Kugelfunctionen $P_n(\mu)$, welche als der Coefficient von e^n in der Entwickelung von $\{1 - 2e\mu + e^2\}^{-1/2}$ nach aufsteigenden Potenzen von e definirt werden können. Weiter wird stets, wenn der feste Körper, ausser dass er um die Axe symmetrisch, ebenso symmetrisch mit Bezug auf seine Aequatorebene ist (deren Durchschnitt mit der Axe als Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird), die Entwickelung der resultirenden Störung nach Kugelfunctionen nur Glieder von ungerader Ordnung enthalten. Z. B. würden, wenn der schwingende Körper eine kreisförmige Scheibe wäre, die sich senkrecht zu ihrer Ebene bewegt, in der Entwickelung von ψ Glieder proportional mit $P_1(\mu)$, $P_3(\mu)$, $P_5(\mu)$ etc. auftreten. Bei der Kugel reducirt sich, wie wir sahen, die Reihe gänzlich auf ihr erstes Glied, und dieses Glied wird auch im Allgemeinen überwiegend sein.

Auf der anderen Seite können wir ein schwingendes System haben, symmetrisch um eine Axe und in Bezug auf eine Aequatorebene, aber so beschaffen, dass die Bewegungen der Theile auf den beiden Seiten der Ebene entgegengesetzt sind. Unter diesen Gesichtspunkt fällt die ideale Stimmgabel, zusammengesetzt aus gleichen Kugeln oder parallelen kreisförmigen Scheiben, deren Entfernung von einander sich periodisch ändert. Symmetriegründe zeigen, dass das Geschwindigkeitspotential, welches in jedem Punkte und seinem Bilde in der Symmetrieebene denselben Werth hat, eine gerade Function von μ und daher durch eine Reihe ausdrückbar sein muss, welche nur die geraden Functionen $P_0(\mu)$, $P_2(\mu)$ etc. enthält. Die zweite Function $P_2(\mu)$ wird gewöhnlich überwiegen, obgleich in einzelnen Fällen, wie z. B., wenn der Körper aus zwei Scheiben, die sich im Vergleich zu ihrem Durchmesser sehr nahe bei einander befinden, zusammengesetzt ist, das Symmetrieglied von der Ordnung Null von bedeutenderem Einfluss werden kann. Eine Vergleichung mit der bekannten Lösung für die Kugel, deren Oberfläche nach einem beliebigen Gesetze schwingt, wird in den meisten Fällen Material zu einer Schätzung in Bezug auf die relative Wichtigkeit der verschiedenen Glieder liefern.

327. Die totale Emission von Energie durch eine schwingende Kugel wird durch Multiplication des veränderlichen Theiles des Druckes (proportional mit ψ) mit der Normalgeschwindigkeit und darauf folgende Integration über die Kugel (§. 245) gefunden. Kraft der conjugirten Eigenschaft können die einzelnen Kugelfunctionenglieder ohne Verlust an Allgemeinheit getrennt genommen werden. Wir haben (§. 323):

$$\left.\begin{aligned} \psi_n &= i\kappa a \frac{S_n e^{i\kappa(at-r)}}{r} f_n(i\kappa r) \\ \frac{d\psi_n}{dr} &= -\frac{S_n e^{i\kappa(at-r)}}{r^2} F_n(i\kappa r) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1),$$

oder, nach Wegwerfung des imaginären Theiles:

$$\left.\begin{aligned}\psi_n &= -\frac{\varkappa a S_n}{r}\{\beta' \cos\varkappa(at-r) + \alpha' \sin\varkappa(at-r)\}\\ \frac{d\psi_n}{dr} &= -\frac{S_n}{r^2}\{\alpha\cos\varkappa(at-r) - \beta\sin\varkappa(at-r)\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots (2),$$

worin:

$$F = \alpha + i\beta, \quad f = \alpha' + i\beta' \quad \ldots\ldots (3).$$

Daher:

$$\int\int \psi_n \frac{d\psi_n}{dr}\, dS = \int\int \psi_n \frac{d\psi_n}{dr} \cdot r^2 d\sigma$$

$$= \frac{\varkappa a}{r}\int\int S_n^2 d\sigma\, \{\alpha\beta' \cos^2\varkappa\,(at-r) - \alpha'\beta \sin^2\varkappa\,(at-r)$$

$$+ (\alpha\alpha' - \beta\beta') \sin\varkappa\,(at-r)\cos\varkappa\,(at-r)\}.$$

Wenn dieses über einen langen Zeitraum integrirt wird, so dürfen die periodischen Glieder vernachlässigt werden und daher:

$$\int \cdot \int\int \psi_n \frac{d\psi_n}{dr} dS \,.\, dt = \frac{\varkappa a t}{2r}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\int\int S_n^2 d\sigma \ldots (4).$$

Da nun im Ganzen keine Anhäufung von Energie in dem zwischen zwei concentrischen sphärischen Flächen eingeschlossenen Raume eintreten kann, so müssen die Mengen von durch diese Flächen geschickter Energie dieselben sein, d. h. es muss $r^{-1}(\alpha'\beta - \beta'\alpha)$ unabhängig von r sein. Um den constanten Werth zu bestimmen, können wir den besonderen Fall nehmen, wo r unendlich gross ist; dann haben wir:

$$F_n(i\varkappa r) = i\varkappa r, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \varkappa r,$$
$$f_n(i\varkappa r) = 1, \quad \alpha' = 1, \quad \beta' = 0.$$

Daher:

$$\alpha'\beta - \beta'\alpha, \text{ identisch, } = \varkappa r \quad \ldots\ldots (5).$$

Es mag beachtet werden, dass das Glied auf der linken Seite von (5) nach Multiplication mit i der imaginäre Theil von $(\alpha + i\beta)(\alpha' - i\beta')$ oder von $F_n(i\varkappa r)\, f_n(-i\varkappa r)$ wird, so dass unser Resultat sich so ausdrücken lässt, dass wir sagen: der imaginäre Theil von $F_n(i\varkappa r)\, f_n(-i\varkappa r)$ ist $i\varkappa r$ oder:

$$F_n(i\varkappa r)\, f_n(-i\varkappa r) - F_n(-i\varkappa r)\, f_n(i\varkappa r) = 2 i\varkappa r \ldots (6).$$

In dieser Form werden wir sofort Gelegenheit haben, Gebrauch von unserem Resultate zu machen.

Zu dem gleichen Schlusse kann man auf etwas directerem Wege gelangen durch eine Anwendung des Helmholtz'schen Theoremes (§. 294), d. i., dass, wenn zwei Functionen u und v überall in einem geschlossenen Raume S die Gleichung $(\nabla^2 + \varkappa^2)\, u = 0$ erfüllen, dann:

$$\int\int \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) dS = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Nehmen wir für S den Raum zwischen zwei concentrischen Kugeln, indem wir setzen:

$$u = \frac{S_n e^{-i\varkappa r} f_n(i\varkappa r)}{r}, \quad v = \frac{S_n e^{+i\varkappa r} f_n(-i\varkappa r)}{r},$$

so finden wir, dass $r^{-1}\{F_n(i\varkappa r) f_n(-i\varkappa r) - F_n(-i\varkappa r) f_n(i\varkappa r)\}$ unabhängig von r sein muss.

Wir haben daher:

$$\int \cdot \int\int \psi_n \frac{d\psi_n}{dr} dS \,.\, dt = -\frac{1}{2} \varkappa^2 a t \int\int S_n^2 d\sigma,$$

so dass der Ausdruck für die in der Zeit t ausgesandte Energie wird (da $\delta p = \varrho \dot{\psi}$):

$$W = \frac{1}{2} \varkappa^2 \varrho a t \int\int S_n^2 d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Lehrreicher ist es, W als Function der Normalbewegung an der Oberfläche einer Kugel vom Radius c darzustellen. Aus (2) ergiebt sich:

$$\frac{d\psi_n}{dr} = -\frac{S_n}{c^2} [\cos \varkappa a t (\alpha \cos \varkappa c + \beta \sin \varkappa c)$$
$$+ \sin \varkappa a t (\alpha \sin \varkappa c - \beta \cos \varkappa c)],$$

so dass wir, wenn U_n die Amplitude von $\frac{d\psi_n}{dr}$ ist, als Relation zwischen S_n und U_n haben:

$$c^4 U_n^2 = (\alpha^2 + \beta^2) S_n^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Daher:

$$W = \frac{\varkappa^2 c^4 \varrho a t}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \int\int U_n^2 d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Diese Formel kann in den speciellen Fällen $n = 0$ und $n = 1$, die wir ja resp. in §§. 280, 325 schon behandelten, verificirt werden.

328. Wenn die Quelle der Störung in einer Normalbewegung eines kleinen Theiles der Oberfläche der Kugel ($r = c$) in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes $\mu = 1$ besteht, so müssen wir in der allgemeinen Lösung, die sich auf divergente Wellen anwenden lässt, d. i.:

$$\psi = -\frac{c^2}{r} e^{i\varkappa(at - r + c)} \Sigma \frac{U_n}{F_n(i\varkappa c)} f_n(i\varkappa r) \ldots (1),$$

nehmen:

$$U_n = \frac{1}{2}(2n+1) P_n(\mu) \cdot \int_{-1}^{+1} U P_n(\mu) d\mu$$

$$= \frac{1}{2}(2n+1) P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} U d\mu$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi c^2} P_n(\mu) \int\int U dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

weil dort, wo U einen unendlichen Werth hat, $P_n = 1$ ist. Daher:

$$\psi = -\frac{e^{i\varkappa(at - r + c)}}{4\pi r} \cdot \int\int U dS . \Sigma (2n+1) P_n(\mu) \frac{f_n(i\varkappa r)}{F_n(i\varkappa c)} \ldots (3).$$

In dieser Formel misst $\int\int U dS$ die Intensität der Quelle.

Ist $i\varkappa c$ sehr klein, so haben wir:

$$\frac{f_0(i\varkappa r)}{F_0(i\varkappa c)} = 1 - i\varkappa c + \ldots, \quad \frac{f_1(i\varkappa r)}{F_1(i\varkappa c)} = i\varkappa c\left(1 + \frac{1}{i\varkappa r}\right) + \ldots \text{ etc.};$$

so dass schliesslich:

$$\psi = -\frac{e^{i\varkappa(at - r)}}{4\pi r} \int\int U dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

und die Wellen wie von einer einfachen Quelle von gleicher Grösse divergiren.

Wir wollen nun das Problem für den Fall untersuchen, wo $\varkappa c$ nicht sehr klein ist, indem wir der Einfachheit halber

den speciellen Fall nehmen, bei welchem ψ nur in einer grossen Entfernung verlangt wird, so dass $f_n(i\varkappa r) = 1$. Der Factor, von welchem die relativen Intensitäten in verschiedenen Richtungen abhängen, lautet:

$$\Sigma \frac{(2n+1)}{2} \frac{P_n(\mu)}{F_n(i\varkappa c)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5);$$

eine vollständige Lösung der Frage würde eine Discussion dieser Reihe als eine Function von μ und $\varkappa c$ bedingen.

Daher haben wir, wenn:

$$\Sigma \frac{(2n+1)}{2} \frac{P_n(\mu)}{F_n(i\varkappa c)} = F + iG \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi r} \int\int U dS . \{F^2 + G^2\}^{1/2} . e^{i\varkappa(at - r + c) i \vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

worin:

$$tang\, \vartheta = G : F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Intensität der Schwingungen in den verschiedenen Richtungen wird daher gemessen durch $F^2 + G^2$. Wenn, wie vorher, $F_n = \alpha + i\beta$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} F &= \Sigma \frac{2n+1}{2} \frac{\alpha P_n(\mu)}{\alpha^2 + \beta^2} \\ -G &= \Sigma \frac{2n+1}{2} \frac{\beta P_n(\mu)}{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Die folgende Tabelle giebt die Mittel zur Berechnung von F und G für jeden Werth von μ, wenn $\varkappa c = \frac{1}{2}$, 1 oder 2. In dem letzten Falle ist es nothwendig, bis $n = 7$ zu gehen, um ein erträglich genaues Resultat zu erhalten; für grössere Werthe von $\varkappa c$ würde die Berechnung bald sehr mühsam werden. Bei allen Problemen dieser Art scheint die Rechnung mit Kugelfunctionen ihre Wirksamkeit zu verlieren, wenn die Wellen sehr klein im Vergleich zu den Dimensionen der Körper sind.

$$\varkappa c = \frac{1}{2}.$$

n	2α	2β	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha:(\alpha^2+\beta^2)$	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta:(\alpha^2+\beta^2)$
0	+ 2	+ 1	+ 0,4	+ 0,2
1	+ 4	— 7	+ 0,1846153	— 0,3230768
2	— 64	— 35	— 0,0601391	— 0,0328885
3	— 466	+ 853	— 0,0034527	+ 0,0063201
4	+ 14902	+ 8141	+ 0,0004653	+ 0,0002542
5	+ 175592	— 321419	+ 0,0000144	— 0,0000264

$$\varkappa c = 1.$$

n	α	β	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha:(\alpha^2+\beta^2)$	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta:(\alpha^2+\beta^2)$
0	+ 1	+ 1	+ 0,25	+ 0,25
1	+ 2	— 1	+ 0,6	— 0,3
2	— 5	— 8	— 0,140449	— 0,224719
3	— 53	+ 34	— 0,046784	+ 0,030013
4	+ 296	+ 461	+ 0,004438	+ 0,006912
5	+ 4951	— 3179	+ 0,000787	— 0,000505
6	— 40613	— 63251	+ 0,000047	— 0,000073
7	— 936340	+ 601217	— 0,000006	+ 0,000004

$\varkappa c = 2.$

n	α	β	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha:(\alpha^2+\beta^2)$	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta:(\alpha^2+\beta^2)$
0	+ 1	+ 2	+ 0,1	+ 0,2
1	+ 2	+ 1	+ 0,6	+ 0,3
2	+ 1,75	— 2,5	+ 0,46980	— 0,67114
3	— 8	— 4	— 0,35	— 0,175
4	— 16,1875	+ 35,125	— 0,04870	+ 0,10567
5	+ 186,625	+ 85,4375	+ 0,02436	+ 0,01115
6	+ 538,80	— 1177,3	+ 0,00209	— 0,00456
7	— 8621,7	— 3945,8	— 0,00072	— 0,00033

Die interessanteste Frage, über welche uns diese Rechnung belehrt, bildet der Einfluss, den eine starre Kugel, welche nahe bei der Quelle liegt, auf die Intensität des Schalles in verschiedenen Richtungen hat. Nach dem Reciprocitätsprincipe (§. 294) können die Quelle und der Beobachtungsort mit einander vertauscht werden. Kennen wir daher in zwei von einander entfernten Punkten B, B' die relativen Intensitäten, welche von einer Quelle A auf der Oberfläche der Kugel herrühren, so haben wir gleichfalls die relativen Intensitäten (gemessen durch das Potential) in dem Punkte A, welche von von einander entfernten Quellen in B und B' herrühren. Mit Hinsicht hierauf hat das Problem ein doppeltes Interesse.

Als ein numerisches Beispiel habe ich die Werthe von $F + iG$ und $F^2 + G^2$ für die obigen Werthe von $\varkappa c$ berechnet, wenn $\mu = 1$, $\mu = -1$, $\mu = 0$, das ist, wenn man von dem Mittelpunkte der Kugel aus sieht, in der Richtung der Quelle, in der entgegengesetzten Richtung und seitwärts.

Ist $\varkappa c$ gleich Null, so haben wir 0,25 für den Werth von $F^2 + G^2$, welches daher nach derselben Scala wie in der Tabelle die Intensität einer Quelle ohne Hemmniss von gleicher Grösse darstellt. Wir können $\varkappa c$ als das Verhältniss des Kugelumfanges zu der Wellenlänge des Schalles auffassen.

$\varkappa c$	μ	$F + iG$	$F^2 + G^2$
$\frac{1}{2}$	1	$0{,}521503 + 0{,}149417\,i$	0,294291
	-1	$0{,}159149 - 0{,}484149\,i$	0,259729
	0	$0{,}430244 - 0{,}216539\,i$	0,231999
1	1	$0{,}667938 + 0{,}238369\,i$	0,502961
	-1	$-0{,}440055 - 0{,}302609\,i$	0,285220
	0	$+0{,}321903 - 0{,}364974\,i$	0,236828
2	1	$0{,}79683 + 0{,}23421\,i$	0,6898
	-1	$0{,}24954 + 0{,}50586\,i$	0,3182
	0	$-0{,}15381 - 0{,}57662\,i$	0,3562

Beim Mustern dieser Zahlen ist der erste Punkt, welcher unsere Aufmerksamkeit auf sich zieht, die vergleichsweise kleine Abweichung von Gleichförmigkeit bei den Intensitäten in verschiedenen Richtungen. Selbst wenn der Umfang der Kugel auf den doppelten Werth der Wellenlänge steigt, ist kaum irgend etwas vorhanden, was Schallschatten genannt werden könnte. Was aber vielleicht noch weniger erwartet wurde, ist das, dass in den beiden ersten Fällen die Intensität hinter der Kugel die in einer transversalen Richtung übertrifft. Dieses Resultat hängt hauptsächlich von dem Ueberwiegen des Gliedes von der ersten Ordnung ab, welches mit μ verschwindet. Die Ordnung der einflussreicheren Glieder wächst mit $\varkappa c$; ist $\varkappa c$ gleich 2, so wird das Hauptglied das von der zweiten Ordnung sein.

Bis zu einem gewissen Punkte wächst die ausgesandte Energie mit Vergrösserung der Kugel, weil eine einfache Quelle doppelt so viel Energie aussendet, wenn sie nahe einer starren Ebene ist, als wenn sie ganz in dem offenen Raume liegt. Innerhalb der Grenzen der Tabelle verdeckt diese Wirkung das von dem Anwachsen der Kugel herrührende Hemmniss, so dass für $\mu = -1$ die Intensität grösser ist, wenn der Kugelumfang das Doppelte der Wellenlänge, als wenn der-

selbe die Hälfte der Wellenlänge beträgt, während die Quelle selbst constant bleibt.

Ist die Quelle nicht einfach harmonisch in Bezug auf die Zeit, so ändern sich bis zu einem merklichen Grade die relativen Verhältnisse der verschiedenen Componenten sowohl mit der Grösse der Kugel, als auch mit der Richtung des Beobachtungspunktes und illustriren so den fundamentalen Charakter der Zerlegung in einfache harmonische Bewegungen.

Wenn $\varkappa c$ entschieden kleiner wie ein-halb ist, so lässt sich die Rechnung mit hinreichender Annäherung algebraisch ausführen. Das Resultat lautet:

$$F^2 + G^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\varkappa^2 c^2\left(\frac{7}{4}\mu^2 - \frac{4}{3}\right)$$
$$+ \frac{1}{4}\varkappa^4 c^4\left(1 + \frac{3}{2}\mu + \frac{50}{81}P_2 + \frac{25}{81}P_2^2 - \frac{7}{20}\mu P_3 + \frac{6}{175}P_4\right)$$
$$+ \text{Glieder mit } \varkappa^6 c^6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Es geht hieraus hervor, dass die Intensität bis zu den Gliedern von der Ordnung $\varkappa^2 c^2$ einschliesslich eine gerade Function von μ, d. h. für je zwei diametral gegenüberliegende Punkte dieselbe ist. Für die Hauptrichtungen, $\mu = \pm 1$ oder 0, ist die numerische Berechnung des Coefficienten von $\varkappa^4 c^4$ wegen der einfachen Werthe, welche die Functionen P dann annehmen, leicht. So:

$$(\mu = 1), \quad F^2 + G^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{144}\varkappa^2 c^2 + 0{,}77755\,\varkappa^4 c^4 + \ldots\ldots$$

$$(\mu = -1), \quad F^2 + G^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{144}\varkappa^2 c^2 + 0{,}02755\,\varkappa^4 c^4 + \ldots\ldots$$

$$(\mu = 0), \quad F^2 + G^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}\varkappa^2 c^2 + 0{,}19534\,\varkappa^4 c^4 + \ldots\ldots$$

Lässt sich $\varkappa^4 c^4$ vernachlässigen, so ist die Intensität in einer seitlichen Richtung geringer wie unmittelbar vor oder hinter der Kugel. Oder es wird, nach dem Reciprocitätsgesetze, eine entfernt liegende Quelle auf der Oberfläche einer kleinen Kugel in dem am weitesten von der Quelle ab liegenden Punkte eine grössere Intensität geben, wie in einer seitlichen Lage.

Wenden wir diese Formeln auf den Fall $\varkappa c = \frac{1}{2}$ an, so erhalten wir:

$$(\mu = 1), \quad F^2 + G^2 = 0{,}3073,$$
$$(\mu = -1), \quad F^2 + G^2 = 0{,}2604,$$
$$(\mu = 0), \quad F^2 + G^2 = 0{,}2344,$$

welches sehr nahe mit den Resultaten der vollständigeren Berechnung übereinstimmt.

Für andere Werthe von μ lässt sich der Coefficient von $\varkappa^4 c^4$ in (10) mit Hülfe der Tabelle der einfachen Legendre'schen Kugelfunctionen berechnen, oder aus dem folgenden algebraischen Ausdrucke in Werthen von μ[1]):

$$1 + \frac{3}{2}\mu + \frac{50}{81}P_2 + \frac{25}{81}P_2^2 - \frac{7}{20}\mu P_3 + \frac{6}{175}P_4$$
$$= 0{,}78138 + 1{,}5\mu + 0{,}85938\mu^2 - 0{,}03056\mu^4.$$

Der Unterschied der Intensitäten in den Richtungen $\mu = +1$ und $\mu = -1$ kann sehr einfach ausgedrückt werden. So ist:

$$(F^2 + G^2)_{\mu=1} - (F^2 + G^2)_{\mu=-1} = \frac{3}{4}\varkappa^4 c^4.$$

$$\text{Wenn } \varkappa c = \frac{3}{8}, \quad \frac{3}{4}\varkappa^4 c^4 = 0{,}0148.$$

$$\text{Wenn } \varkappa c = \frac{2}{8}, \quad \frac{3}{4}\varkappa^4 c^4 = 0{,}0029.$$

$$\text{Wenn } \varkappa c = \frac{1}{8}, \quad \frac{3}{4}\varkappa^4 c^4 = 0{,}0002.$$

Gleichzeitig nähert sich der totale Werth von $F^2 + G^2$ der Grösse 0,25, wenn $\varkappa c$ klein ist.

Diese Zahlen finden eine interessante Anwendung in der Erklärung der Rolle, welche die beiden Ohren bei der Wahrnehmung der Raumquadranten spielen, aus welchem der Schall kommt.

Es ist zu bemerken, dass die Aenderungen der Intensität in verschiedenen Richtungen, von denen wir gesprochen haben,

---

[1]) Wegen der Formen der Functionen P siehe §. 334.

von der Gegenwart der Kugel als ein Hemmniss herrühren und nicht von der Thatsache, dass die Quelle auf dem Umfange der Kugel statt im Mittelpunkte derselben liegt. In einer grossen Entfernung afficirt eine kleine Verschiebung einer Schallquelle die Phase, aber nicht die Intensität in irgend einer Richtung.

Um die Aenderung der Phase zu finden, haben wir für eine kleine Kugel:

$$F = \frac{1}{2} + \varkappa^2 c^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\mu - \frac{5}{18} P_2\right), \quad G = \varkappa c \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\mu\right),$$

$$\operatorname{tang} \vartheta = G : F = \varkappa c \left(-1 + \frac{3}{2}\mu\right),$$

$$\text{oder } \vartheta = \varkappa c \left(-1 + \frac{3}{2}\mu\right) \text{ angenähert.}$$

Daher in (7):

$$e^{i\varkappa(at - r + c) + i\vartheta} = e^{i\varkappa(at - r + 3/2\,\mu c)},$$

woraus wir schliessen können, dass die Phase in entfernten Punkten dieselbe ist, als wenn die Quelle im Punkte $\mu = 1$, $r = \frac{3}{2}c$ (anstatt bei $r = c$) gelegen und kein Hinderniss vorhanden wäre.

329. Die Functionssymbole f und F lassen sich in Werthen von P ausdrücken. Es ist bekannt[1], dass:

$$P_n(\mu) = 1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{1} \cdot \frac{1-\mu}{2} + \ldots,$$

oder, wenn man μ in $1 - \mu$ verwandelt:

$$P_n(1-\mu) = 1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{1} \cdot \frac{\mu}{2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\mu^2}{2^2} - \ldots \quad (1).$$

Betrachten wir nun die symbolische Operation $P_n\left(1 - \frac{d}{dy}\right)$, und nehmen wir dieselbe mit y^{-1} vor.

[1]) Thomson und Tait: Theor. Physik, §. 782 (entnommen von Murphy).

Da:

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^s \cdot \frac{1}{y} = (-1)(-2)\ldots\ldots(-s)y^{-s-1},$$

so ist:

$$P_n\left(1 - \frac{d}{dy}\right) \cdot \frac{1}{y} = y^{-1} + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,y^{-2}$$

$$+ \frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2\,.\,4}\,y^{-3} + \ldots$$

Ein Vergleich mit (9) §. 323 zeigt nun, dass:

$$f_n(y) = y P_n\left(1 - \frac{d}{dy}\right) \cdot \frac{1}{y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

woraus wir nach einer bekannten Formel ableiten:

$$\frac{e^{-y}}{y} f_n(y) = e^{-y} P_n\left(1 - \frac{d}{dy}\right)\frac{1}{y} = (-1)^n P_n\left(\frac{d}{dy}\right)\cdot\frac{e^{-y}}{y} \ldots (3).$$

Auf gleiche Weise:

$$\frac{e^{+y}}{y} f_n(-y) = P_n\left(\frac{d}{dy}\right) \cdot \frac{e^{+y}}{y}.$$

Identificiren wir nun y mit $i\varkappa r$, so sehen wir, dass sich die allgemeine Lösung, (12) §. 323, schreiben lässt:

$$\psi_n = (-1)^n i\varkappa S_n P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right) \cdot \frac{e^{-i\varkappa r}}{i\varkappa r}$$

$$+ i\varkappa S_n' P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right) \cdot \frac{e^{+i\varkappa r}}{i\varkappa r} \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

worin das zweite Glied zu vernachlässigen ist, wenn sich kein Theil der Störung nach innen fortpflanzt.

Weiter sehen wir aus (14) §. 323, dass:

$$\frac{F_n(y)}{y^2} = \left(1 - \frac{d}{dy}\right) \cdot \frac{f_n(y)}{y},$$

woraus:

$$F_n(y) = y^2 P_n\left(1 - \frac{d}{dy}\right)\left(1 - \frac{d}{dy}\right) \cdot \frac{1}{y} \ldots (5),$$

und:

$$\frac{F_n(y)\,e^{-y}}{y^2} = -(-)^n P_n\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{d}{dy} \cdot \frac{e^{-y}}{y} \ldots (6).$$

Auf gleiche Weise:

$$\frac{F_n(-y)e^{+y}}{y^2} = -P_n\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{d}{dy}\cdot\frac{e^{+y}}{y} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Gebrauchen wir diese Ausdrücke in (13) §. 323, so erhalten wir:

$$\frac{d\psi_n}{dr} = (-)^{n+1}\varkappa^2 S_n P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\cdot\frac{e^{-i\varkappa r}}{i\varkappa r}$$

$$-\varkappa^2 S_n' P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\cdot\frac{e^{+i\varkappa r}}{i\varkappa r} \quad . \quad . \quad (8).$$

330. Wir haben schon ausführlicher die Form ins Auge gefasst, welche unsere allgemeinen Ausdrücke annehmen, wenn im Unendlichen keine Quelle liegt. Eine gleich wichtige Classe von Fällen wird durch die Bedingung definirt, dass im Anfangspunkte keine Quelle vorhanden ist. Wir wollen nun untersuchen, welche Einschränkung dadurch unseren allgemeinen Ausdrücken auferlegt wird.

Kehren wir die Reihe für f_n um, so haben wir:

$$r\psi_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{(i\varkappa r)^n}\{S_n e^{-i\varkappa r}(1+i\varkappa r+\ldots)$$

$$+(-1)^n S_n' e^{+i\varkappa r}(1-i\varkappa r+\ldots)\};$$

diese Gleichung zeigt, dass, wenn r ohne Grenzen abnimmt, $r\psi_n$ sich folgendem Werthe nähert:

$$r\psi_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{(i\varkappa r)^n}\{S_n + (-1)^n S_n'\}.$$

Damit also ψ_n am Anfangspunkte endlich sein kann, muss sein:

$$S_n + (-1)^n S_n' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

dass diese Bedingung auch hinreichend ist, werden wir später sehen.

Demgemäss wird (12) §. 323:

$$r\psi_n = S_n\{e^{-i\varkappa r}f_n(i\varkappa r) - (-1)^n e^{+i\varkappa r}f_n(-i\varkappa r)\}\quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Schreiben wir, wie vorher, zur Trennung der reellen und imaginären Theile von f_n:

$$f_n = \alpha' + i\beta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

so lässt sich (2) in folgende Form bringen:

$$r\psi_n = -2\,i^{n+1}\,S_n\left\{\alpha'\sin\left(\varkappa r + \frac{1}{2}n\pi\right)\right.$$
$$\left. - \beta'\cos\left(\varkappa r + \frac{1}{2}n\pi\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Eine andere Form kann aus (4) §. 329 abgeleitet werden. Wir haben:

$$\psi_n = -2\,i\varkappa\,(-1)^n S_n P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\cdot\frac{e^{+i\varkappa r} - e^{-i\varkappa r}}{2\,i\varkappa r}$$
$$= -2\,i\varkappa\,(-1)^n S_n P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\cdot\frac{\sin\varkappa r}{\varkappa r} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Da die Function P_n weder ganz ungerade noch ganz gerade ist, so fällt der Ausdruck für ψ_n entweder ganz reell oder ganz imaginär aus.

Um zu beweisen, dass der Werth von ψ_n in (5) endlich bleibt, wenn r verschwindet, beginnen wir damit, zu beachten, dass:

$$\frac{2\sin\varkappa r}{\varkappa r} = \int_{-1}^{+1} e^{-i\varkappa r\mu}\,d\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

so dass:

$$2P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\frac{\sin\varkappa r}{\varkappa r} = \int_{-1}^{+1} P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)e^{i\varkappa r\mu}\,d\mu$$
$$= \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\,e^{i\varkappa r\mu}\,d\mu \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wie auf der Hand liegt, wenn man bedenkt, dass die Wirkung einer beliebigen Zahl von Differentiationen von $e^{i\varkappa r\mu}$ nach $i\varkappa r$ darin besteht, dass $e^{i\varkappa r\mu}$ mit der entsprechenden Potenz von μ multiplicirt wird. Es bleibt jetzt noch übrig, den Ausdruck auf der rechten Seite nach steigenden Potenzen von r zu entwickeln. Wir haben:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\,e^{i\varkappa r\mu}\,d\mu = \int_{-1}^{+1} d\mu\,P_n(\mu)\left\{1 + i\varkappa r\,.\,\mu + \frac{(i\varkappa r)^2}{1\,.\,2}\cdot\mu^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{(i\varkappa r)^n}{1\,.\,2\ldots n}\cdot\mu^n + \ldots\right\}.$$

Nun lässt sich jede positive ganze Potenz von μ, etwa μ^p, in eine endliche Reihe der Functionen P entwickeln, wobei die Function der höchsten Ordnung P_p ist. Es folgt hieraus, dass, wenn $p < n$,

$$\int_{-1}^{+1} \mu^p P_n(\mu)\, d\mu = 0,$$

nach bekannten Eigenschaften dieser Functionen; die niedrigste Potenz von $i\varkappa r$ in $\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)^{i\varkappa r \mu} d\mu$ ist demnach $(i\varkappa r)^n$. Behalten wir nur das Hauptglied zurück, so haben wir:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, e^{i\varkappa r\mu}\, d\mu = \frac{(i\varkappa r)^n}{1.2\ldots n} \int_{-1}^{+1} \mu^n P_n(\mu)\, d\mu.$$

Aus dem Ausdrucke für $P_n(\mu)$ in Werthen von μ, d. i.:

$$P_n(\mu) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \left\{\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right\} \ldots (8),$$

sehen wir, dass:

$$\mu^n = \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)} P_n(\mu) + \text{Glieder mit } \mu \text{ von niedrigerer Ordnung wie } \mu^n;$$

und daher:

$$\int_{-1}^{+1} \mu^n P_n(\mu)\, d\mu = \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)} \int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2\, d\mu$$

$$= \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \cdot \frac{2}{2n+1} \quad \ldots\ldots (9).$$

Demgemäss nach (5) und (7):

$$\psi_n = -2i\varkappa(-1)^n S_n \frac{(i\varkappa r)^n}{1.3.5\ldots(2n+1)} + \ldots\ldots \quad (10),$$

welches zeigt, dass ψ_n mit r verschwindet, ausgenommen den Fall, wo $n = 0$ ist.

Die vollständige Reihe für ψ_n im Falle, dass im Pole keine Quelle liegt, wird zweckmässiger mit Hülfe der Theorie der Bessel'schen Functionen erhalten. Die Differentialgleichungen (4) §. 200, welche von diesen Functionen erfüllt werden, d. i.:

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + \frac{1}{z}\frac{d y}{d z} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

lassen sich auch folgendermaassen schreiben:

$$\frac{d^2 (y z^{1/2})}{d z^2} + \left(1 - \frac{4 m^2 - 1}{4 z^2}\right) y z^{1/2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Es ist bekannt (§. 200), dass die Lösung von (11), die der Bedingung der Endlichkeit für $z = 0$ unterliegt, lautet $y = A J_m(z)$, worin:

$$J_m(z) = \frac{z^m}{2^m \Gamma(m+1)} \left\{1 - \frac{z^2}{2 \, . \, (2m+2)} + \frac{z^4}{2 \, . \, 4 \, . \, (2m+2)(2m+4)} - \dots \right\} \dots (13)$$

die Bessel'sche Function von der Ordnung m ist.

Für ganze m hat man $\Gamma(m+1) = 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \dots m$; hier haben wir aber mit gebrochenen m von der Form $n + \frac{1}{2}$ zu thun, wo n eine ganze Zahl bedeutet. In diesem Falle ist:

$$\Gamma(m+1) = \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} \, . \, \sqrt{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Mit Bezug auf (12) sehen wir, dass die Lösung von:

$$\frac{d^2 \vartheta}{d z^2} + \left(1 - \frac{4 m^2 - 1}{4 z^2}\right) \vartheta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

unter derselben Bedingung der Endlichkeit für $z = 0$ lautet:

$$\vartheta = A z^{1/2} J_m(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Nun erfüllt die Function ψ_n, mit welcher wir jetzt zu thun haben, die Gleichung (4) §. 323, d. i.:

$$\frac{d^2 (r \psi_n)}{d (\varkappa r)^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{(\varkappa r)^2}\right) r \psi_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

welche dieselbe Form hat wie (15), wenn $m = n + \frac{1}{2}$; so dass die Lösung lautet:

$$\psi_n = A(\varkappa r)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)$$

$$= A \frac{(\varkappa r)^n \sqrt{2}}{1.3 \ldots (2n+1)\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \frac{(\varkappa r)^2}{2.(2n+3)} + \frac{(\varkappa r)^4}{2.4.(2n+3)(2n+5)} - \ldots \right\} \quad \ldots \quad (18).$$

Nach Bestimmung der Constante durch Vergleichung mit (10) ergiebt sich:

$$\psi_n = -2(-1)^n i^{n+1} \varkappa S_n \left(\frac{\pi}{2\varkappa r}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)$$

$$= -2i\varkappa(-1)^n S_n \frac{(i\varkappa r)^n}{1.3.5 \ldots (2n+1)} \left\{ 1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2(2n+3)} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2.4.(2n+3)(2n+5)} - \frac{\varkappa^6 r^6}{2.4.6.(2n+3)(2n+5)(2n+7)} + \ldots \right\} \quad \ldots \quad (19),$$

als der vollständige Ausdruck für ψ_n nach aufsteigenden Potenzen von r.

Vergleichen wir die verschiedenen Ausdrücke (5) und (19) für ψ_n, so erhalten wir:

$$P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa r}\right) \cdot \frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} = i^n \left(\frac{\pi}{2\varkappa r}\right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r) \ldots (20).$$

Ist $F = \alpha + i\beta$, so sind die entsprechenden Ausdrücke für $\frac{d\psi_n}{dr}$:

$$d\psi_n = -\frac{S_n}{r^2} \{ e^{-i\varkappa r} F_n(i\varkappa r) - (-1)^n e^{+i\varkappa r} F_n(-i\varkappa r) \}$$

$$= \frac{2i^{n+1} S_n}{r^2} \left\{ \alpha \sin\left(\varkappa r + \frac{1}{2} n\pi\right) - \beta \cos\left(\varkappa r + \frac{1}{2} n\pi\right) \right\}$$

$$= -2i\varkappa^2(-1)^n S_n P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa r}\right) \frac{d}{d.\varkappa r} \cdot \frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r}$$

$$= \frac{2n(-1)^n \varkappa^2 S_n (i\varkappa r)^{n-1}}{1.3.5 \ldots (2n+1)} \left\{ 1 - \frac{n+2}{2n(2n+3)} \varkappa^2 r^2 + \ldots \right\} \ldots (21).$$

Es wird zweckmässig sein, zur Vergleichung die Formen von ψ und $\frac{d\psi}{dr}$ für die ersten drei Ordnungen hinzuschreiben:

$$n=0 \begin{cases} \psi_0 = -2i\varkappa S_0 \frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r}, \\ \frac{d\psi_0}{dr} = \frac{2i\varkappa S_0}{r}\left\{\frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} - \cos \varkappa r\right\}. \end{cases}$$

$$n=1 \begin{cases} \psi_1 = \frac{2 S_1}{r}\left\{\cos \varkappa r - \frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r}\right\}, \\ \frac{d\psi_1}{dr} = -\frac{2 S_1}{r^2}\left\{2\cos \varkappa r + \left(\varkappa r - \frac{2}{\varkappa r}\right)\sin \varkappa r\right\}. \end{cases}$$

$$n=2 \begin{cases} \psi_2 = -\frac{2 i S_2}{r}\left\{\left(1 - \frac{3}{\varkappa^2 r^2}\right)\sin \varkappa r + \frac{3}{\varkappa r}\cos \varkappa r\right\}, \\ \frac{d\psi_2}{dr} = \frac{2 i S_2}{r^2}\left\{\left(4 - \frac{9}{\varkappa^2 r^2}\right)\sin \varkappa r - \left(\varkappa r - \frac{9}{\varkappa r}\right)\cos \varkappa r\right\}. \end{cases}$$

331. Eine der interessantesten Anwendungen dieser Resultate bezieht sich auf die Untersuchung der Bewegung eines Gases innerhalb einer starren, kugelförmigen Hülle. Um die freien Perioden zu bestimmen, haben wir nur anzunehmen, dass $\frac{d\psi}{dr}$ verschwindet, wenn r gleich dem Radius der Hülle ist. So ergiebt sich bei symmetrischen Schwingungen zur Bestimmung von $\varkappa$:

$$\operatorname{tang} \varkappa r = \varkappa r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

eine Gleichung, die wir in dem Capitel über Membranen schon betrachtet haben, §. 207. Die erste endliche Wurzel ($\varkappa r = 1{,}4303\ \pi$) entspricht der symmetrischen Schwingung von der tiefsten Tonhöhe. Für eine höhere Wurzel hat die fragliche Schwingung sphärische Knoten, deren Radien den unteren Wurzeln entsprechen.

Jeder Kegel, dessen Scheitel im Ursprunge liegt, kann starr gemacht werden, ohne die Bedingungen der vorliegenden Frage zu beeinflussen.

Die Bäuche oder Orte, wo keine Druckänderung eintritt, werden durch $(\varkappa r)^{-1} \sin \varkappa r = 0$, oder $\varkappa r = m\pi$ gegeben; m ist irgend eine ganze Zahl, Null ausgenommen.

Der Fall $n = 1$, in welchem die Schwingungen diametral genannt werden können, bietet vielleicht das meiste Interesse. S_1 wird, da es eine harmonische Kugelfunction von der ersten Ordnung ist, proportional mit $\cos \vartheta$ sein, wo ϑ den Winkel zwischen r und irgend einer festen Vergleichsrichtung darstellt. Da $\frac{d\psi_1}{d\vartheta}$ nur an den Polen verschwindet, giebt es keine conischen Knoten[1]) mit dem Scheitel im Centrum. Jede Meridianebene ist indessen eine Knotenebene und kann als starr gedacht werden. Längs eines speciellen Radius vector verschwinden ψ_1 und $\frac{d\psi_1}{d\vartheta}$ und ändern ihr Zeichen mit $\cos \varkappa r - (\varkappa r)^{-1} \sin \varkappa r$, d. i., wenn $\operatorname{tang} \varkappa r = \varkappa r$. Die Bäuche fallen daher in dem vorliegenden Falle mit den Knotenflächen der radialen Schwingungen zusammen.

Um die sphärischen Knoten zu finden, haben wir:

$$\operatorname{tang} \varkappa r = \frac{2\varkappa r}{2 - \varkappa^2 r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die erste Wurzel ist $\varkappa r = 0$. Durch versuchsweise Rechnung nach den trigonometrischen Tabellen finde ich für die nächste Wurzel, welche der wichtigsten Schwingung in der Kugel entspricht, $\varkappa r = 119{,}26 \frac{\pi}{180}$, so dass $r : \lambda = 0{,}3313$.

Die Luft schwankt von einer Seite zur andern in fast derselben Weise wie bei einer doppelt geschlossenen Pfeife. Ohne Rechnung können wir voraussetzen, dass die Tonhöhe für die Kugel höher ist, wie für eine geschlossene Pfeife von derselben Länge, weil die Kugel sich von dem Cylinder mit geschlossenen Enden ableiten lässt, indem man denselben theilweise mit hemmendem Materiale anfüllt; die Wirkung hiervon muss darin bestehen, die Federkraft zu verstärken, während

---

[1]) Ein Knoten ist eine Fläche, welche als starr gedacht werden kann, d. i., durch welche hindurch keine Bewegung stattfindet.

die zu bewegende Masse nur wenig geändert wird. Für eine geschlossene Pfeife von der Länge $2r$ haben wir:

$$r : \lambda = 0{,}25.$$

Der Ton der Kugel ist daher etwa um eine Quarte höher wie der des Cylinders.

Die eben betrachtete Schwingung ist die tiefste, deren die Kugel fähig ist; sie ist um mehr wie eine Octave tiefer, wie die tiefste radiale Schwingung. Die nächste Schwingung dieser Art ist so beschaffen, dass $\varkappa r = 340{,}35 \frac{\pi}{180}$, oder:

$$r : \lambda = 0{,}9454,$$

und fällt demnach höher wie die erste radiale aus.

Wenn $\varkappa r$ gross ist, so lassen sich die Wurzeln von (2) zweckmässig mittelst einer Reihe berechnen. Ist $\varkappa r = m\pi - y$, so hat man:

$$tang\, y = \frac{2(m\pi - y)}{(m\pi - y)^2 - 2},$$

woraus wir finden:

$$\varkappa r = m\pi - \frac{2}{m\pi} - \frac{16}{3 m^3 \pi^3} + \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Für $n = 2$ lautet der allgemeine Ausdruck für S_n:

$$S_2 = A_0 \left(cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right) + (A_1 \cos \omega + B_1 \sin \omega) \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$+ (A_2 \cos 2\omega + B_2 \sin 2\omega) \sin^2 \vartheta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

woraus wir zur specielleren Betrachtung die folgenden bemerkenswerthen Fälle auswählen können:

(α) die einaxige Kugelfunction [1])

[1]) [Die im Texte gebrauchten Ausdrücke: einaxige Kugelfunction, Sectorkugelfunction, Tesseralkugelfunction stehen für die englischen Ausdrücke resp. zonal harmonic, sectorial harmonic, tesseral harmonic. Wegen der Bedeutung dieser Grössen wird auf Maxwell: Electricity and Magnetism I, Cap. IX, Art. 132 und 138, in letzterem auf p. 171, verwiesen. Es sei kurz erwähnt, dass die beiden letzten Arten von Kugelfunctionen zweiaxige sind, und dass in der allgemeinen Kugelfunction der $i$ten Ordnung $Y_i^{(n)}$ mit $2i + 1$ Gliedern das erste Glied, welches frei von ϑ ist, die einaxige Kugelfunction (zonal har-

$$S_2 = A_0 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Hier ist $\frac{d\psi_2}{d\vartheta}$ proportional mit $\sin 2\vartheta$ und verschwindet daher für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$. Dieses zeigt, dass die Aequatorebene eine Knotenfläche ist, so dass dieselbe Bewegung innerhalb einer geschlossenen Halbkugel stattfinden kann. Ebenso kann jede Meridianebene, da S_2 nicht ω enthält, als starr angesehen werden.

(β) Sectorkugelfunction:

$$S_2 = A_2 \cos 2\omega \sin^2 \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Hier ändert sich $\frac{d\psi_2}{d\vartheta}$ wieder proportional $\sin 2\vartheta$, und die Aequatorebene ist somit wieder eine Knotenfläche. $\frac{d\psi_2}{d\omega}$ ist aber proportional mit $\sin 2\omega$, und verschwindet daher nicht unabhängig von ϑ, ausgenommen für $\sin 2\omega = 0$. Es geht hieraus hervor, dass zwei, und nur zwei, Meridianebenen Knotenflächen sind, und dass diese senkrecht auf einander stehen.

(γ) Tesseralkugelfunction:

$$S_2 = A_1 \cos \omega \sin \vartheta \cos \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

In diesem Falle verschwindet $\frac{d\psi_2}{d\vartheta}$ unabhängig von ω mit $\cos 2\vartheta$, d. i., wenn $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ oder $\frac{3}{4}\pi$, welches als Knotenfläche einen Umdrehungskegel giebt, dessen verticaler Winkel ein rechter Winkel ist. $\frac{d\psi_2}{d\omega}$ ändert sich wie $\sin \omega$, und es ist demnach eine, und nur eine, Meridianknotenebene vorhanden.

Die kugelförmigen Knotenflächen werden gegeben durch:

$$\tan \varkappa r = \frac{\varkappa^3 r^3 - 9\varkappa r}{4\varkappa^2 r^2 - 9} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

monic) giebt; die beiden letzten, welche $\sin i\omega$ und $\cos i\omega$ als Factor haben, die Sectorkugelfunction (sectorial harmonic) und die übrigen die Tesseralkugelfunction (tesseral harmonic) genannt werden. Anm. des Uebers.]

deren erste endliche Lösung lautet:

$$\varkappa r = 3{,}3422;$$

sie giebt einen Ton an, der tiefer wie alle aus der radialen Gruppe ist.

Für die allgemeine Kugelfunction lässt sich die Gleichung, welche die in einer Kugel vom Radius r möglichen Töne giebt, schreiben (21) §. 330:

$$tang\left(\varkappa r + \frac{1}{2} n \pi\right) = \beta : \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8),$$

oder:

$$P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right) \frac{d}{d\,.\,\varkappa r} \cdot \frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

oder weiter:

$$2\,\varkappa r\, J'_{n + \frac{1}{2}}(\varkappa r) = J_{n + \frac{1}{2}}(\varkappa r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Tabelle A giebt die Werthe von λ für eine Kugel vom Radius Eins entsprechend den wichtigeren Schwingungsarten. In B finden sich die Schwingungszahlen der verschiedenen Schwingungen angegeben, bezogen auf die tiefste des ganzen Systemes. Die Tabelle ist weit genug ausgedehnt, um zwei Octaven einzuschliessen.

Tabelle A,
welche die Werthe von λ für eine Kugel vom Radius Eins giebt.

Ordnung der Kugelfunctionen.

		0	1	2	3	4	5	6
Anzahl der inneren kugelförmigen Knotenflächen	0	1,3983	3,0186	1,8800	1,392	1,113	0,9300	0,8002
	1	0,81334	1,0577	0,86195	0,7320	0,6385		
	2	0,57622	0,68251	0,59208	0,5248			
	3	0,44670	0,50653	0,45380				
	4	0,36485	0,40330					
	5	0,30833	0,33523					

Tabelle B.

Höhe jedes Tones bezogen auf den tiefsten	Ordnung der Kugelfunctionen	Anzahl der inneren kugelförmigen Knotenflächen	Höhe jedes Tones bezogen auf den tiefsten	Ordnung der Kugelfunctionen	Anzahl der inneren kugelförmigen Knotenflächen
1,0000	1	0	2,8540	1	1
1,6056	2	0	3,2458	5	0
2,1588	0	0	3,5021	2	1
2,169	3	0	3,7114	0	1
2,712	4	0	3,772	6	0

332. Geben wir unnöthige Constanten auf, so wird die particuläre Lösung für die Schwingungen eines Gases in einem kugelförmigen Raume vom Radius Eins dargestellt durch:

$$\psi_n = S_n (\varkappa r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\varkappa r) \cos(\varkappa a t - \vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin $\varkappa$ eine Wurzel ist von:

$$2 \varkappa J'_{n+1/2}(\varkappa) = J_{n+1/2}(\varkappa) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Bei der Verallgemeinerung dieses Resultates müssen wir daran denken, dass sich S_n aus verschiedenen Gliedern zusammensetzen kann; für jedes dieser Glieder kann eine Schwingung mit willkürlicher Amplitude und Phase vorhanden sein. Weiter kann jedes Glied in S_n mit irgend welchen oder allen Werthen von $\varkappa$, wie dieselben durch (2) bestimmt sind, verbunden sein. Z. B. können wir bei $n = 2$ haben:

$$\psi_2 = A\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)(\varkappa_1 r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\varkappa_1 r) \cos(\varkappa_1 a t + \vartheta_1)$$
$$+ B \cos 2\omega \sin^2\vartheta\, (\varkappa_2 r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\varkappa_2 r) \cos(\varkappa_2 a t + \vartheta_2)$$

wo $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ verschiedene Wurzeln sind von:

$$2\varkappa J'_{5/2}(\varkappa) = J_{5/2}(\varkappa).$$

Je zwei der Componenten von ψ sind conjugirt, d. i., ihr Product verschwindet, wenn dasselbe über das Volumen der Kugel integrirt wird. Dieses folgt aus derjenigen Eigenschaft der Kugelfunctionen, welche überall da gilt, wo die zwei betrachteten Glieder verschiedenen Werthen von n oder zwei verschiedenen Componenten von S_n entsprechen [1]). Der einzige zur Betrachtung übrig bleibende Fall fordert von uns, zu beweisen, dass ist:

$$\int_0^1 r^2 dr . (\varkappa_1 r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\varkappa_1 r) . (\varkappa_2 r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\varkappa_2 r) = 0 \quad \ldots (3),$$

worin $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ verschiedene Wurzeln sind von:

$$2\varkappa J'_{n+1/2}(\varkappa) = J_{n+1/2}(\varkappa) \quad \ldots \ldots \quad (4);$$

dies ist eine unmittelbare Folge einer fundamentalen Eigenschaft dieser Functionen (§. 203). Demnach liegt keine Schwierigkeit mehr vor in der Anpassung der allgemeinen Lösung an vorgeschriebene Anfangszustände.

Um eine Illustration dieses Gegenstandes zu geben, wollen wir den Fall nehmen, wo das Gas sich im Anfange in seiner Gleichgewichtslage befindet, aber sich mit constanter Geschwindigkeit parallel x bewegt. Dieser Zustand wird annähernd verwirklicht, wenn der Hohlraum, nachdem er sich vorher in gleichförmiger Bewegung befunden hat, aufgehalten wird.

Da anfängliche Verdichtung oder Verdünnung nicht vorhanden ist, so verschwinden alle Grössen ϑ_n. Ist $\frac{d\psi}{dx}$ im Anfange gleich Eins, so haben wir $\psi = x = r\mu$, welches zeigt, dass die Lösung nur Glieder der ersten Ordnung in Kugelfunctionen enthält. Die Lösung hat demnach folgende Form:

$$\psi = A_1 (\varkappa_1 r)^{-1/2} J_{3/2}(\varkappa_1 r)\, \mu \cos \varkappa_1 at$$
$$+ A_2 (\varkappa_2 r)^{-1/2} J_{3/2}(\varkappa_2 r)\, \mu \cos \varkappa_2 at + \quad \ldots (5),$$

---

1) Thomson und Tait, Theoret. Physik, p. 151.

worin $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ etc. Wurzeln sind von:

$$2\varkappa J'_{3/2}(\varkappa) = J_{3/2}(\varkappa) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Zur Bestimmung der Coefficienten haben wir im Anfange für die Werthe von r von 0 bis 1:

$$r = A_1(\varkappa_1 r)^{-1/2} J_{3/2}(\varkappa_1 r) + A_2(\varkappa_2 r)^{-1/2} J_{3/2}(\varkappa_2 r) + \ldots (7).$$

Multiplicirt man mit $r^{3/2} J_{3/2}(\varkappa r)$ und integrirt mit Bezug auf r von 0 bis 1, so ergiebt sich:

$$\int_0^1 r^{5/2} J_{3/2}(\varkappa r)\, dr = A\varkappa^{-1/2} \int_0^1 [J_{3/2}(\varkappa r)]^2 r\, dr \quad . \; . \; . \; (8),$$

da die anderen Glieder auf der rechten Seite wegen der conjugirten Eigenschaft verschwinden. Nun ist nach (16) §. 203:

$$2\int_0^1 [J_{3/2}(\varkappa r)]^2 r\, dr = [J'_{3/2}(\varkappa)]^2 + \left(1 - \frac{9}{4\varkappa^2}\right)[J_{3/2}(\varkappa)]^2$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\varkappa^2}\right)[J_{3/2}(\varkappa)]^2 \; . \quad . \quad . \quad (9)$$

nach (6).

Die Auswerthung von $\int_0^1 r^{5/2} J_{3/2}(\varkappa r)\, dr$ lässt sich mittelst eines allgemeinen Theoremes, das für diese Functionen gilt, bewirken. Nach der Fundamentaldifferentialgleichung ist:

$$\int_0^r r^{n+1}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dJ_n(\varkappa r)}{dr}\right) + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)J_n(\varkappa r)\right]dr = 0,$$

woraus wir durch theilweise Integration erhalten:

$$\varkappa^2 \int_0^r r^{n+1} J_n(\varkappa r)\, dr = n r^n J_n(\varkappa r) - r^{n+1}\frac{dJ_n(\varkappa r)}{dr} \ldots (10),$$

oder, wenn wir $r = 1$ machen:

$$\varkappa^2 \int_0^1 r^{n+1} J_n(\varkappa r) dr = n J_n(\varkappa) - \varkappa J'_n(\varkappa) \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Daher ist in dem Falle, mit welchem wir hier zu thun haben:

$$\varkappa^2 \int_0^1 r^{5/2} J_{3/2}(\varkappa r) dr = \frac{3}{2} J_{3/2}(\varkappa) - \varkappa J'_{3/2}(\varkappa) = J_{3/2}(\varkappa) \text{ nach (6).}$$

Gleichung (8) nimmt demnach folgende Form an:

$$A = \frac{2\varkappa^{1/2}}{(\varkappa^2 - 2) J_{3/2}(\varkappa)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

und die schliessliche Lösung lautet:

$$\psi = \Sigma \frac{2 r^{-1/2} \mu}{\varkappa^2 - 2} \frac{J_{3/2}(\varkappa r)}{J_{3/2}(\varkappa)} \cos \varkappa a t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

worin die Summation über alle zulässigen Werthe von $\varkappa$ auszudehnen ist.

Für $t = 0$ und $r = 1$ müssen wir haben $\psi = \mu$ und demgemäss:

$$\Sigma \frac{2}{\varkappa^2 - 2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Man wird sich erinnern, dass die höheren Werthe von $\varkappa$ angenähert nach (3) §. 331 sind:

$$\varkappa = m\pi - \frac{2}{m\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Der erste Werth von $\varkappa$ ist 2,0815 und der zweite 5,9402, woraus:

$$\frac{2}{\varkappa_1^2 - 2} = 0{,}85742, \quad \frac{2}{\varkappa_2^2 - 2} - 0{,}06009;$$

diese Werthe zeigen, dass das erste Glied in der Reihe für ψ bei Weitem das Wichtigste ist.

Es mag zweckmässig sein, hier daran zu erinnern, dass:

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Gleichung (14) lässt sich auf folgende Weise verificiren. Die Grössen $\varkappa$ sind die Wurzeln von:

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{-1/2} J_{3/2}(z)\right\} = 0,$$

oder, wenn $\varphi = z^{-1/2} J_{3/2}(z)$, die Wurzeln von $\varphi' = 0$, wo φ folgende Gleichung erfüllt:

$$\varphi'' + \frac{2}{z}\varphi' + \left(1 - \frac{2}{z^2}\right)\varphi = 0 \quad \ldots \quad (17).$$

Da nun das Hauptglied in der Entwickelung von φ' nach aufsteigenden Potenzen von z unabhängig von z ist, so können wir setzen:

$$\varphi' = const\left\{1 - \frac{z^2}{\varkappa_1^2}\right\}\left\{1 - \frac{z^2}{\varkappa_2^2}\right\}\ldots$$

woraus, wenn wir den Logarithmus nehmen und differentiren:

$$-\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{2z}{\varkappa_1^2 - z^2} + \frac{2z}{\varkappa_2^2 - z^2} + \ldots$$

Setzt man nun $z^2 = 2$, so erhält man nach (17):

$$\Sigma\,\frac{2}{\varkappa^2 - 2} = -\frac{\varphi''}{z\varphi'}(z^2 = 2) = 1.$$

333. Auf gleiche Weise können wir das Problem der Schwingungen von Luft behandeln, welche zwischen starren concentrischen kugelförmigen Flächen eingeschlossen ist, deren Radien sind r_1 und r_2. Denn nach (13) §. 323 ist, wenn $\frac{d\psi_n}{dr}$ für diese Werthe von r verschwindet:

$$e^{2i\varkappa r_1}\frac{F_n(-i\varkappa r_1)}{F_n(+i\varkappa r_1)} = e^{2i\varkappa r_2}\frac{F_n(-i\varkappa r_2)}{F_n(+i\varkappa r_2)},$$

woraus:

$$tang\,\varkappa(r_1 - r_2) = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_1\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2} \quad \ldots \quad (1),$$

worin, wie vorher:

$$F_n(+i\varkappa r) = \alpha + i\beta \quad \ldots \quad (2).$$

Wenn die Differenz zwischen r_1 und r_2 sehr klein im Vergleich mit jedem einzelnen dieser Radien ist, so fällt das Problem mit dem der Schwingungen einer kugelförmigen Luftschicht zusammen und wird am besten unabhängig für sich gelöst. In (1) §. 323 haben wir, falls ψ unabhängig von r ist, wie es ersichtlich in dem angenommenen Probleme angenähert der Fall sein muss:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\psi}{d\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2\psi}{d\omega^2}+\varkappa^2 r^2\psi=0\;\;\ldots\;\;(3),$$

deren Lösung einfach ist:

$$\psi_n = S_n\;\;\ldots\ldots\;\;(4),$$

während die zulässigen Werthe von $\varkappa^2$ gegeben werden durch:

$$\varkappa^2 r^2 = n(n+1)\;\;\ldots\ldots\;\;(5).$$

Das Intervall zwischen dem tiefsten Tone ($n = 1$) und dem nächsten ist der Art, dass das Doppelte desselben eine Duodecime (Octave + Quinte) ausmacht. Das Problem einer kugelförmigen Luftschicht wird in dem folgenden Capitel weiter betrachtet werden.

334. Die nächste Anwendung, welche wir von der Rechnung mit Kugelfunctionen machen wollen, ist die Untersuchung der Störung, welche eintritt, wenn ebene Schallwellen auf eine hemmende Kugel treffen. Wir nehmen den Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt von Polarcoordinaten und die Richtung, von welcher die Wellen her kommen, als Axe der μ; das Potential der ungehemmten ebenen Wellen sei φ. Dann haben wir, wenn wir einen unnöthigen complexen Coefficienten weglassen:

$$\varphi = e^{i\varkappa(at+x)} = e^{i\varkappa at}\,.\,e^{i\varkappa r\mu}\;\;\ldots\ldots\;\;(1);$$

die Lösung des Problemes erfordert die Entwickelung von $e^{i\varkappa r\mu}$ in Kugelfunctionen. Wegen der Symmetrie reduciren sich die Kugelfunctionen auf die Legendre'schen Functionen $P_n(\mu)$, so dass wir setzen dürfen:

$$e^{i\varkappa r\mu} = A_0 + A_1 P_1 + \ldots + A_n P_n + \ldots\;(2),$$

worin $A_0 \ldots$ Functionen von r, aber nicht von μ sind. Aus

dem, was schon bewiesen wurde, können wir vorwegnehmen, dass A_n, als Function von r betrachtet, sich ändern muss proportional mit:

$$P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\frac{\sin\varkappa r}{\varkappa r},\quad \text{oder wie } r^{-1/2}J_{n+1/2}(\varkappa r),$$

dasselbe Resultat lässt sich aber auch leicht direct erhalten. Multipliciren wir (2) mit $P_n(\mu)$, integriren mit Bezug auf μ von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$, so finden wir:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\,e^{i\varkappa r\mu}\,d\mu = A_n\int_{-1}^{+1}(P_n)^2\,d\mu = \frac{2A^n}{2n+1}\;\ldots\;(3);$$

und wie in §. 330:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\,e^{i\varkappa r\mu}\,d\mu = 2P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\cdot\frac{\sin\varkappa r}{\varkappa r},$$

so dass schliesslich:

$$\frac{A_n}{2n+1} = P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\cdot\frac{\sin\varkappa r}{\varkappa r} = i^n\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa r}}\cdot J_{n+1/2}(\varkappa r)\ldots(4).$$

Bei dem vorliegenden Probleme kann die ganze Bewegung ausserhalb der Kugel in zwei Theile getheilt werden; der erste wird durch φ dargestellt und entspricht den ungestörten ebenen Wellen, der zweite giebt eine Störung an, welche von dem Vorhandensein der Kugel herrührt und von derselben nach aussen ausstrahlt. Ist das Potential des letzteren Theiles ψ, so haben wir für (2) §. 324 nach Ersetzung der allgemeinen Kugelfunction S_n durch $a_n P_n(\mu)$:

$$\left.\begin{aligned} r\psi_n &= a_n P_n(\mu)\,.\,e^{-i\varkappa r} f_n(i\varkappa r) \\ r^2\frac{d\psi_n}{dr} &= -\,a_n P_n(\mu)\,.\,e^{-i\varkappa r} F_n(i\varkappa r)\end{aligned}\right\}\;\ldots\;(5).$$

Das Geschwindigkeitspotential der ganzen Bewegung wird gefunden, indem man φ und ψ addirt, wobei die Constanten a_n durch die Grenzbedingungen bestimmt sind, deren Form von der Art des Hemmnisses, welches durch die Kugel geliefert wird, abhängt. Der einfachste Fall ist der einer starren

und festen Kugel; dann ist die für $r = c$ zu erfüllende Bedingung:

$$\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\psi}{dr} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

eine Beziehung, welche natürlich für jedes Element der Kugelfunctionen einzeln gelten muss. Für das Element von der Ordnung n erhalten wir:

$$a_n = (2n + 1)\frac{\varkappa c^2 e^{i\varkappa c}}{F_n(i\varkappa c)} P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa c}\right)\frac{d}{d.\varkappa c} \cdot \frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c} \ldots (7).$$

Entsprechend den ebenen Wellen $\varphi = e^{i\varkappa(at + x)}$ wird die Störung, welche von dem Vorhandensein der Kugel herrührt, ausgedrückt durch:

$$\psi = \frac{\varkappa c^2}{r} e^{i\varkappa(at - r + c)}$$
$$\times \Sigma_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{F_n(i\varkappa c)} P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa c}\right)\frac{d}{d.\varkappa c} \cdot \frac{\sin\varkappa c}{\varkappa c} \cdot P_n(\mu) . f_n(i\varkappa r) \ldots (8).$$

In einer hinreichenden Entfernung von der Quelle der Störung dürfen wir setzen: $f_n(i\varkappa r) = 1$. Um zur Lösung eines reellen Problemes überzugehen, können wir den reellen von dem imaginären Theile trennen und den letzteren fortlassen. Unter dieser Voraussetzung werden die ebenen Wellen dargestellt durch:

$$[\varphi] = \cos \varkappa(at + x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Indem wir uns der Einfachheit halber auf Theile des Raumes beschränken, die in einer grossen Entfernung von der Kugel liegen, wo also $f_n(i\varkappa r) = 1$, gehen wir weiter über zu der Absonderung der reellen Theile von (8). Da die Functionen P entweder ganz gerade oder ganz ungerade sind, so ist:

$$P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa c}\right)\frac{d}{d.\varkappa c} \cdot \frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c}$$

ganz reell oder ganz imaginär, so dass dieser Factor keine Schwierigkeit darbietet. $\{F_n(i\varkappa c)\}^{-1}$ ist indessen complex; da $F_n(i\varkappa c) = \alpha + i\beta$, so haben wir:

$$\{F_n(i\varkappa c)\}^{-1} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}},$$

wenn $\operatorname{tang} \gamma = - \beta : \alpha$.

Somit:

$$\psi = \Sigma (2n + 1) \frac{\varkappa c^2}{r} e^{i[\varkappa(at - r + c) + \gamma]}$$

$$\times \{\alpha^2 + \beta^2\}^{-1/2} P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa c}\right) \frac{d}{d.\varkappa c} \cdot \frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c} \cdot P_n(\mu) \quad \ldots \quad (10).$$

Wenn demnach n gerade ist, so haben wir:

$$[\psi] = (2n + 1) \frac{\varkappa c^2}{r} \cos\{\varkappa(at - r + c) + \gamma\}$$

$$\times \{\alpha^2 + \beta^2\}^{-1/2} P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa c}\right) \frac{d}{d.\varkappa c} \cdot \frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c} \cdot P_n(\mu) \quad \ldots \quad (11),$$

während, wenn n ungerade:

$$[\psi] = (2n + 1) \frac{\varkappa c^2}{r} i \sin\{\varkappa(at - r + c) + \gamma\}$$

$$\times \{\alpha^2 + \beta^2\}^{-1/2} P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa c}\right) \frac{d}{d.\varkappa c} \cdot \frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c} \cdot P_n(\mu) \quad \ldots \quad (12).$$

Als Beispiel wollen wir die Glieder in $[\psi]$, welche Kugelfunctionen von der Ordnung 0, 1, 2 enthalten, hinschreiben. Die folgende Tabelle der Functionen $P_n(\mu)$ wird von Nutzen sein.

$$P_0 = 1,$$

$$P_1 = \mu,$$

$$P_2 = \frac{3}{2}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right),$$

$$P_3 = \frac{5}{2}\left(\mu^3 - \frac{3}{5}\mu\right),$$

$$P_4 = \frac{35}{8}\left(\mu^4 - \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{35}\right),$$

$$P_5 = \frac{63}{8}\left(\mu^5 - \frac{10}{9}\mu^3 + \frac{5}{21}\mu\right).$$

Wir haben:

$$n = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 + \varkappa^2 c^2, \quad \operatorname{tang} \gamma_0 = -\varkappa c,$$

$$[\psi_0] = \frac{\varkappa c^2}{r} \{1 + \varkappa^2 c^2\}^{-1/2} \frac{d}{d.\varkappa c} \frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c}$$

$$. \cos\{\varkappa(at - r + c) + \gamma_0\} \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

$$n = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \varkappa^2 c^2 + \frac{4}{\varkappa^2 c^2}, \quad tang\,\gamma_1 = -\frac{\varkappa^2 c^2 - 2}{2\varkappa c},$$

$$[\psi_1] = \frac{3\varkappa c^2}{r}\left\{\varkappa^2 c^2 + \frac{4}{\varkappa^2 c^2}\right\}^{-1/2} \frac{d^2}{d(\varkappa c)^2} \cdot \frac{\sin\varkappa c}{\varkappa c}$$

$$.\,\mu\,.\,\sin\{\varkappa(at - r + c) + \gamma_1\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

$$n = 2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \varkappa^2 c^2 - 2 + \frac{9}{\varkappa^2 c^2} + \frac{81}{\varkappa^4 c^4},$$

$$tang\,\gamma_2 = -\frac{\varkappa^2 c^2 - 9}{4\varkappa^2 c^2 - 9},$$

$$[\psi_2] = -\frac{45\varkappa c^2}{r}\left\{\varkappa^2 c^2 - 2 + \frac{9}{\varkappa^2 c^2} + \frac{81}{\varkappa^4 c^4}\right\}^{-1/2}$$

$$\times \left\{\frac{d^3}{d(\varkappa c)^3} + \frac{1}{3}\frac{d}{d(\varkappa c)}\right\} \frac{\sin\varkappa c}{\varkappa c}$$

$$.\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\cos\{\varkappa(at - r + c) + \gamma_2\} \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Die hier erlangte Lösung des Problemes hat, wenn sie auch analytisch ganz allgemein ist, praktisch kaum einen Werth, ausgenommen den Fall, wo $\varkappa c$ eine kleine Grösse ist. In diesem Falle entwickeln wir unsere Resultate mit Vortheil nach aufsteigenden Potenzen von $\varkappa c$.

$$[\psi_0] = -\frac{\varkappa^2 c^3}{3r}\left(1 - \frac{3}{5}\varkappa^2 c^2 + \frac{3}{7}\varkappa^4 c^4 - \frac{19}{54}\varkappa^6 c^6 + \ldots\right)$$

$$\times \cos\{\varkappa(at - r + c) + \gamma_0\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

$$[\psi_1] = -\frac{\varkappa^2 c^3}{2r}\left(1 - \frac{3}{10}\varkappa^2 c^2 - \frac{3}{28}\varkappa^4 c^4 + \frac{1}{27}\varkappa^6 c^6 + \ldots\right)$$

$$\times \mu\,.\,\sin\{\varkappa(at - r + c) + \gamma_1\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

$$[\psi_2] = -\frac{\varkappa^4 c^5}{9r}\left(1 - \frac{25}{126}\varkappa^2 c^2 + \frac{13}{567}\varkappa^4 c^4 + \ldots\right)$$

$$\times \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\cos\{\varkappa(at - r + c) + \gamma_2\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Es geht hieraus hervor, dass, während $[\psi_0]$ und $[\psi_1]$ von derselben Ordnung in Bezug auf die kleine Grösse $\varkappa c$ sind, $[\psi_2]$ zwei Ordnungen höher ist. Wir werden sofort finden,

dass die höheren Kugelfunctionencomponenten in $[\psi]$ von noch höheren Potenzen von $\varkappa c$ abhängen. Für eine erste Annäherung dürfen wir uns daher auf die Elemente von der Ordnung 0 und 1 beschränken.

Obgleich $[\psi_0]$ einen Cosinus und $[\psi_1]$ einen Sinus enthält, so differiren dieselben in der Phase doch nur um eine kleine Grösse. Durch Vergleichung zweier der Werthe von $\frac{d\psi_n}{dr}$ in (21) §. 330 erkennen wir, dass identisch:

$$\alpha \sin\left(\varkappa r + \frac{1}{2} n\pi\right) - \beta \cos\left(\varkappa r + \frac{1}{2} n\pi\right)$$

$$= -(-1)^n \frac{n(\varkappa r)^{n+1}}{1.3.5\ldots(2n+1)} + \text{höhere Potenzen von } \varkappa r.$$

Dividiren wir durch $\alpha \cos\left(\varkappa r + \frac{1}{2} n\pi\right)$, so erhalten wir schliesslich:

$$tang\left(\varkappa r + \frac{1}{2} n\pi\right) - \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{(-1)^n}{\alpha \cos\left(\varkappa r + \frac{1}{2} n\pi\right)} \cdot \frac{n(\varkappa r)^{n+1}}{1.3.5\ldots(2n+1)}.$$

Für ein gerades n wird diese Gleichung nach Ersetzung von α durch sein Hauptglied:

$$tang\,\varkappa r - \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{n}{(n+1)(2n+1)} \frac{(\varkappa r)^{2n+1}}{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2} \quad \ldots \quad (19).$$

Z. B., wenn $n = 2$:

$$tang\,\varkappa r - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2 = -\frac{2(\varkappa r)^5}{3^3 \,.\, 5} + \ldots$$

Ist n überhaupt gross, so werden die Ausdrücke $tang\,\varkappa r$ und $\beta : \alpha$ für mässige Werthe von $\varkappa r$ sehr nahe identisch.

Für ein ungerades n erhalten wir auf eine nahezu ähnliche Weise:

$$cotg\,\varkappa r + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n(\varkappa r)^{2n-1}}{(n+1)(2n+1)\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2} + \ldots$$

oder:

$$tang\,\varkappa r + \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{n(\varkappa r)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2} + \ldots (20).$$

Aus diesen Resultaten sehen wir, dass, wenn n gerade ist:

$$\gamma = -\varkappa c \text{ angenähert,}$$

und wenn n ungerade:

$$\gamma = \frac{1}{2}\pi - \varkappa c \text{ angenähert.}$$

Das Geschwindigkeitspotential der von einer kleinen starren und festen Kugel herrührenden Störung wird daher angenähert gegeben durch:

$$[\psi_0] + [\psi_1] = -\frac{\varkappa^2 c^3}{3 r}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right) \cos \varkappa (a t - r)$$

$$= -\frac{\pi T}{r \lambda^2}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right) \cos \varkappa (a t - r) \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

wenn T das Volumen der Kugel bedeutet; die entsprechende directe Welle ist dabei:

$$[\varphi] = \cos \varkappa (a t + x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Für ein gegebenes Hinderniss und eine bestimmte Entfernung ist das Verhältniss der Amplituden der an dem Hindernisse zerstreuten und der directen Wellen im Allgemeinen proportional dem umgekehrten Quadrate der Wellenlänge und das Verhältniss der Intensitäten proportional der umgekehrten vierten Potenz (§. 296).

Um die Intensitäten der primären und der zerstreuten Schalle zu vergleichen, können wir annehmen, dass der erstere in einer einfachen Quelle entspringt, vorausgesetzt, dass dieselbe in einer hinreichenden Entfernung (R) von T abliegt. Somit ist, wenn:

$$[\varphi] = \frac{\cos \varkappa (a t - R)}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

$$[\psi] = -\frac{\pi T}{r R \lambda^2}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right) \cos \varkappa (a t - r) \ldots (24);$$

so dass die secundäre und primäre Welle in gleichen Abständen von ihren Quellen folgendes Verhältniss haben:

$$-\frac{\pi T}{R \lambda^2}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Die Intensitäten stehen demnach in dem Verhältnisse:

$$\frac{\pi^2 T^2}{R^2 \lambda^4}\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26),$$

was für $\mu = + 1$ annähernd giebt:

$$\frac{61{,}72\, T^2}{R^2 \lambda^4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27).$$

Es muss wohl beachtet werden, dass, wenn man dieses Resultat anwenden will, λ gross im Vergleich mit der linearen Dimension von T, und R gross im Vergleich zu λ sein muss.

Um das Hauptglied in dem Ausdrucke für ψ_n zu finden, wenn $\varkappa c$ klein ist, haben wir an erster Stelle:

$$(2n + 1) P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa c}\right)\frac{d}{d.\varkappa c}\cdot\frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c}$$

$$= \frac{n i^n (\varkappa c)^{n-1}}{1.3.5\ldots(2n-1)}\left\{1 - \frac{(n+2)\varkappa^2 c^2}{2.n.(2n+3)} + \ldots\right\} \ldots (28).$$

Weiter:

$$\alpha^2 + \beta^2 = F_n(i\varkappa c) \times F_n(-i\varkappa c)$$

$$= \{1.3.5\ldots(2n-1)(n+1)(\varkappa c)^{-n}\}^2$$

$$\left\{1 + \frac{(n-1)\varkappa^2 c^2}{(n+1)\, 2n-1)} + \ldots\right\} \ldots (29);$$

so dass:

$$\{\alpha^2 + \beta^2\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{(\varkappa c)^n}{1.3\ldots(2n-1)(n+1)}$$

$$\left\{1 - \frac{(n-1)\varkappa^2 c^2}{2.(n+1)(2n-1)} + \ldots\right\} \ldots (30).$$

Daher nach (10):

$$\psi_n = \frac{c(\varkappa c)^{2n} n i^n P_n(\mu)}{r\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2 (n+1)} e^{i[\varkappa(at - r + c) + \gamma_n]}$$

$$\times\left\{1 - \varkappa^2 c^2\left(\frac{n-1}{(2n+2)(2n-1)} + \frac{n+2}{2n(2n+3)}\right) + \ldots\right\} \ldots (31).$$

Für ein gerades n ist γ_n annähernd $= -\varkappa c$, und dann:

$$[\psi_n] = \frac{c(\varkappa c)^{2n} n i^n P_n(\mu)}{r\{1.3\ldots(2n-1)\}^2(n+1)} \cos \varkappa(at - r)$$

$$\times\left\{1 - \varkappa^2 c^2\left(\frac{n-1}{(2n+2)(2n-1)} + \frac{n+2}{2n(2n+3)}\right) + \ldots\right\} \ldots (32),$$

während wir für ein ungerades n nur i^n durch i^{n+1} zu ersetzen haben; das Resultat bleibt dabei noch reell.

Mittelst (31) können wir die ersten zwei Glieder in den Ausdrücken für $[\psi_1]$, $[\psi_2]$ in (17), (18) verificiren. Auf den Fall $n = 0$ ist (31) nicht anwendbar.

Weiter nach (31):

$$[\psi_3] = \frac{\varkappa^6 c^7}{120 r}\left\{1 - \frac{77}{540}\varkappa^2 c^2\right\}\left\{\mu^3 - \frac{3}{5}\mu\right\}$$
$$\times \sin\{\varkappa(at - r + c) + \gamma_3\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33),$$
$$[\psi_4] = \frac{\varkappa^8 c^9}{3150 r}\left\{\mu^4 - \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{35}\right\}$$
$$\times \cos\{\varkappa(at - r + c) + \gamma_4\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Combiniren wir (17), (18), (33), (34), so haben wir den Werth von $[\psi]$ vollständig bis auf die Glieder, welche verglichen mit den beiden in (21) gegebenen bestimmenden Gliedern von der Ordnung $\varkappa^6 c^6$ sind. Bei der Zusammensetzung der Theilausdrücke ist es nöthig, mit Bezug sowohl auf die Phasen der Componenten als auch auf deren Amplituden genau zu sein; für Zwecke jedoch, die nur ein harmonisches Schwingungselement zu irgend einer Zeit erfordern, hat die Phase oft eine untergeordnete Bedeutung. In solchen Fällen dürfen wir setzen:

$$(n \text{ gerade})\ \gamma = -\varkappa c, \qquad (n \text{ ungerade})\ \gamma = \frac{1}{2}\pi - \varkappa c.$$

Aus (31) oder (32) geht hervor, dass das bestimmende Glied in ψ_n steigt für jeden Schritt in der Ordnung der Kugelfunction um zwei Ordnungen in $\varkappa c$; und dass ψ_n selbst durch eine Reihe ausgedrückt wird, welche nur gerade oder nur ungerade Potenzen von $\varkappa c$ enthält. Das Hauptglied wird aber ausserdem, dass es von höherer Ordnung wie $\varkappa c$ ist, mit wachsendem n sehr rasch kleiner wegen der anderen Factoren, welche dasselbe enthält. Dieses ist evident, weil für alle Werthe von n und μ, $P_n(\mu) < 1$ ist. Dasselbe ist richtig für $n : n + 1$, während i^n nur die Phase beeinflusst.

In einzelnen Fällen können irgend welche der Kugelfunctionelemente von $[\psi]$ verschwinden. Aus (11), (12) haben

wir, da $\alpha^2 + \beta^2$ nicht verschwinden kann, in einem solchen Falle:

$$P_n\left(\frac{d}{d \,.\, i\varkappa c}\right)\frac{d}{d \,.\, \varkappa c}\frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c} = 0,$$

dieselbe Gleichung, wie diejenige ist, welche die Perioden der Schwingungen von der Ordnung n in einer geschlossenen Kugel vom Radius c angiebt. Eine kleine Ueberlegung wird zeigen, dass dieses Resultat erwartet werden konnte Die Tabelle des §. 331 lässt sich auf die vorliegende Frage anwenden und zeigt unter anderen Dingen, dass, wenn $\varkappa c$ klein ist, kein Glied der Kugelfunctionsreihe in $[\psi]$ verschwinden kann.

In Folge der Luftdrucke wirkt auf die Kugel eine Kraft parallel der Axe der μ, deren Bestreben ist, die Kugel in Schwingungen zu versetzen. Die Grösse dieser Kraft wird, wenn σ die Dichtigkeit des Fluidums bedeutet, gegeben durch:

$$2\pi c^2 \sigma \int_{-1}^{+1} (\varphi + \psi)\, \mu \, d\mu,$$

worin nach der conjugirten Eigenschaft der Legendre'schen Functionen nur das Glied von der ersten Ordnung das Resultat der Integration beeinflusst.

Nun ist für $r = c$:

$$\varphi_1 = 3\, e^{i\varkappa a t}\frac{d}{d \,.\, i\varkappa c}\frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c}\cdot \mu,$$

$$\psi_1 = 3\,\varkappa c\, e^{i\varkappa a t}\frac{f_1(i\varkappa c)}{F_1(i\varkappa c)}\frac{d}{d \,.\, i\varkappa c}\cdot\frac{d}{d \,.\, \varkappa c}\cdot\frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c}\cdot \mu,$$

worin:

$$f_1(i\varkappa c) = 1 + \frac{1}{i\varkappa c},\quad F_1(i\varkappa c) = i\varkappa c + 2 + \frac{2}{i\varkappa c}.$$

Damit die Kraft verschwinden kann, muss sein:

$$\frac{d}{d \,.\, \varkappa c}\cdot\frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c} + \varkappa c\,\frac{f_1(i\varkappa c)}{F_1(i\varkappa c)}\frac{d^2}{(d \,.\, \varkappa c)^2}\frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c} = 0,$$

was sich durch keinen reellen Werth von $\varkappa c$ erfüllen lässt. Wir schliessen daraus, dass die Kugel, wenn sie sich frei bewegen kann, stets in Schwingung gesetzt wird.

Wenn anstatt absolut eben zu sein die primären Wellen ihren Ursprung in einer Quelle von der Intensität Eins in einer grossen aber endlichen Entfernung R von dem Mittelpunkte der Kugel haben, so ist:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi R} e^{i\varkappa(at - R)} \Sigma(2n+1) P_n(\mu)$$

$$\times P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa r}\right)\frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35),$$

$$\psi = -\frac{\varkappa c^2}{4\pi r R} e^{i\varkappa(at - R - r + c)} \Sigma(2n+1) \frac{P_n(\mu) f_n(i\varkappa r)}{F_n(i\varkappa c)}$$

$$\times P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa c}\right)\frac{d}{d\,.\,\varkappa c}\frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Auf der Kugel selbst ist $r = c$, so dass der Werth des totalen Potentiales in irgend einem Punkte der Kugelfläche lautet:

$$\varphi + \psi = -\frac{e^{i\varkappa(at - R)}}{4\pi R} \Sigma(2n+1) P_n(\mu)$$

$$\times \left[P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa c}\right)\frac{\sin\varkappa c}{\varkappa c} + \varkappa c \frac{f_n(i\varkappa c)}{F_n(i\varkappa c)} P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa c}\right)\frac{d}{d\,.\,\varkappa c}\frac{\sin\varkappa c}{\varkappa c}\right].$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen. Wir haben:

$$P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa c}\right)\frac{\sin\varkappa c}{\varkappa c}$$

$$= \frac{1}{2i\varkappa c}\{-(-1)^n e^{-i\varkappa c} f_n(i\varkappa c) \mp e^{+i\varkappa c} f_n(-i\varkappa c)\},$$

$$\frac{d}{d\,.\,\varkappa c} \cdot P_n\left(\frac{d}{d\,.\,i\varkappa c}\right)\frac{\sin\varkappa c}{\varkappa c}$$

$$= \frac{1}{2i\varkappa^2 c^2}\{(-1)^n e^{-i\varkappa c} F_n(i\varkappa c) - e^{+i\varkappa c} f_n(-i\varkappa c)\},$$

demnach lässt sich die Grösse innerhalb der Klammern schreiben:

$$\frac{e^{i\varkappa c}}{2i\varkappa c}\,\frac{F_n(i\varkappa c) f_n(-i\varkappa c) - F_n(-i\varkappa c) f_n(i\varkappa c)}{F_n(i\varkappa c)},$$

welches nach (6) §. 327 identisch ist mit $e^{i\varkappa c}[F_n(i\varkappa c)]^{-1}$. Somit:

$$\varphi + \psi = -\frac{e^{i\varkappa(at - R + c)}}{4\pi R} \Sigma(2n+1) \frac{P_n(\mu)}{F_n(i\varkappa c)} \quad . \quad . \quad . \quad (37),$$

welches dasselbe ist, als wenn die Quelle auf der Kugel gelegen hätte und der Punkt, in welchem das Potential gesucht wird, in einer grossen Entfernung gewesen wäre (§. 328); es ist dieses ein Beispiel des allgemeinen Principes der Reciprocität. Unter Annahme dieses Principes und Benutzung des Resultates (3) §. 308 sehen wir, dass, wenn die Quelle der primären Wellen in einer endlichen Entfernung R liegt, der Werth des totalen Potentiales in irgend einem Punkte der Kugel ist:

$$\varphi + \psi = -\frac{1}{4\pi R} e^{i\varkappa(at - R + c)} \Sigma (2n+1) P_n(\mu) \frac{f_n(i\varkappa R)}{F_n(i\varkappa c)} \ldots (38).$$

Sind A und B irgend zwei Punkte ausserhalb der Kugel, so wird eine Quelle Eins in A dasselbe totale Potential in B geben, wie eine Quelle Eins in B liefern würde in A. In jedem der beiden Fälle besteht das totale Potential aus zwei Theilen, von denen der erste derselbe ist, als wenn der freien Fortpflanzung der Wellen kein Hinderniss entgegenstände und der zweite die von dem Hindernisse herrührende Störung darstellt. Von diesen beiden Theilen ist der erste offenbar derselbe, welcher von den beiden Punkten auch als Quelle angesehen werden mag; daher müssen die anderen Theile auch einander gleich sein, d. h.: der Werth von ψ in B, wenn A eine Quelle ist, muss gleich dem Werthe von ψ in A sein, wenn B eine gleiche Quelle ist. Liegt nun die Quelle A in einer grossen Entfernung R, so lautet der Werth von ψ in einem Punkte B, dessen Winkelabstand von A gleich $arc \cos \mu$ ist und dessen linearer Abstand vom Mittelpunkte r beträgt, nach (36):

$$\psi = -\frac{\varkappa c^2}{4\pi r R} e^{i\varkappa(at - R - r + c)} \Sigma (2n+1) \frac{P_n(\mu) f_n(i\varkappa r)}{F_n(i\varkappa c)} \times P_n\left(\frac{d}{d \cdot i\varkappa c}\right) \frac{d}{d \cdot \varkappa c} \cdot \frac{\sin \varkappa c}{\varkappa c},$$

demgemäss ist dieses auch der Werth von ψ in einer grossen Entfernung R, wenn die Quelle in B liegt. Da aber ψ eine Störung ist, welche von der Kugel nach aussen ausstrahlt, so kann man ihren Werth in jeder endlichen Entfernung R von der in einer unendlichen Entfernung ableiten, indem man in jedes Kugelfunctionenglied den Factor $f(i\varkappa R)$ einführt. Wir erhalten somit den folgenden symmetrischen Ausdruck:

$$\psi = -\frac{\varkappa c^2}{4\pi r R} e^{i\varkappa(at - R - r + c)} \Sigma(2n+1)\frac{P_n(\mu)}{F_n(i\varkappa c)}$$

$$\times f_n(i\varkappa R).f_n(i\varkappa r) P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa c}\right)\frac{d}{d.\varkappa c}\frac{\sin\varkappa c}{\varkappa c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39),$$

welcher diesen Theil des Potentiales in jedem der beiden Punkte angiebt, wenn in dem anderen eine einzelne Quelle liegt.

Es ist zu bemerken, dass der allgemeine Theil der Beweisführung nicht davon abhängt, ob das Hinderniss kugelförmig oder starr ist.

Aus der Entwickelung von $e^{i\varkappa r\mu}$ in Kugelfunctionen können wir die Entwickelung des Potentiales von Wellen ableiten, welche von einer einfachen Quelle Eins, die um ein Endliches (r) von dem Anfangspunkte der Coordinaten abliegt, ausgehen. Das Potential in einem Punkte B in einem unendlichen Abstande R von dem Ursprunge und in einer Richtung, welche einen Winkel $arccos\,\mu$ mit r macht, lautet:

$$\varphi = \frac{e^{-i\varkappa(R-\mu r)}}{4\pi R},$$

wobei der Zeitfactor vernachlässigt ist.

Nach der Entwickelung von $e^{i\varkappa r\mu}$ haben wir also:

$$\varphi = \frac{e^{-i\varkappa R}}{4\pi R}\Sigma(2n+1)P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa r}\right)\frac{\sin\varkappa r}{\varkappa r}\cdot P_n(\mu);$$

woraus wir zu dem Werthe eines endlichen R durch einfache Einführung des Factors $f_n(i\varkappa R)$ übergehen.

Somit lautet das Potential einer Quelle Eins in A in einem Punkte B, welcher in einer endlichen Entfernung liegt:

$$\varphi = \frac{e^{i\varkappa(at-R)}}{4\pi R}\Sigma(2n+1)P_n\left(\frac{d}{d.i\varkappa r}\right)\frac{\sin\varkappa r}{\varkappa r} f_n(i\varkappa R)$$

$$.\,P_n(\mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

335. Nachdem wir mit einiger Ausführlichkeit den Fall eines starren kugelförmigen Hindernisses betrachtet haben, wollen wir jetzt kurz den Verlauf der Untersuchung zeichnen,

wenn das Hinderniss gasförmig ist. Obwohl bei allen in der Natur vorkommenden Gasen die Zusammendrückbarkeit nahezu dieselbe ist, wollen wir der grösseren Allgemeinheit halber annehmen, dass die Materie, welche die Kugel einnimmt, sowohl in der Zusammendrückbarkeit wie in der Dichte von dem Medium abweicht, in welchem die ebenen Wellen vorschreiten.

Ausserhalb der Kugel hat φ genau denselben Werth, und ist ψ von derselben Form wie vorher. Für die Bewegung innerhalb der Kugel haben wir, wenn $\varkappa' = 2\pi : \lambda'$ die innere Wellenlänge ist, nach (2) §. 330:

$$\psi_n = \frac{a_n' P_n}{r} \{e^{-i\varkappa r} f_n(i\varkappa' r) - (-1)^n e^{+i\varkappa' r} f_n(-i\varkappa' r)\},$$

$$\frac{d\psi_n}{dr} = \frac{2 a_n' P_n}{r^2} \cdot i^{n+1} \left\{\alpha \sin\left(\varkappa' r + \frac{1}{2} n\pi\right) - \beta \cos\left(\varkappa' r + \frac{1}{2} n\pi\right)\right\},$$

welche Beziehung die Continuitätsbedingung durch den Mittelpunkt hindurch erfüllt.

Sind σ und σ' die natürlichen Dichtigkeiten, m und m' die Zusammendrückbarkeiten, so ist:

$$\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2} = \frac{\sigma'}{\sigma} \cdot \frac{m}{m'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1);$$

die Bedingungen, welche von jedem einzelnen Kugelfunctionselemente für sich erfüllt werden müssen, sind:

$$\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d\psi}{dr} \text{ (ausserhalb)} = \frac{d\psi}{dr} \text{ (innerhalb)} \quad \ldots \quad (2),$$

$$\sigma \{\varphi + \psi \text{ (ausserhalb)}\} = \sigma' \psi \text{ (innerhalb)} \quad \ldots \quad (3),$$

sie drücken resp. die Gleichheit der Normalbewegungen und Drucke auf den beiden Seiten der Begrenzungsfläche aus. Aus diesen Gleichungen kann die vollständige Lösung abgeleitet werden; indessen wollen wir uns darauf beschränken, den Werth der Hauptglieder zu finden, wenn $\varkappa c$, $\varkappa' c$ sehr klein sind.

In diesem Falle ist für $r = c$:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 \text{ (innerhalb)} &= -2 i\varkappa' a_0' \\ \frac{d\psi_0}{dr} \text{ (innerhalb)} &= \frac{2}{3} i\varkappa'^3 c a_0' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= 1\\ \frac{d\varphi_0}{dr} &= -\frac{1}{3}\varkappa^2 c\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_0 \text{ (ausserhalb)} &= \frac{a_0}{c}\\ \frac{d\psi_0}{dr} \text{ (ausserhalb)} &= -\frac{a_0}{c^2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Benutzen wir diese Relationen in (2) und (3) und eliminiren a_0', indem wir nur das Hauptglied zurückbehalten, so finden wir:

$$a_0 = -\frac{\varkappa^2 c^3}{3} \cdot \frac{m' - m}{m'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Auf gleiche Weise für das Glied von der ersten Ordnung:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 \text{ (innerhalb)} &= -\frac{2}{3} a_1' \varkappa'^2 c\mu\\ \frac{d\psi_1}{dr} \text{ (innerhalb)} &= -\frac{2}{3} a_1' \varkappa'^2 \mu\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8),$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= i\varkappa c\mu\\ \frac{d\varphi_1}{dr} &= i\varkappa\mu\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 \text{ (ausserhalb)} &= \frac{a_1}{i\varkappa c^2}\mu\\ \frac{d\psi_1}{dr} \text{ (ausserhalb)} &= -\frac{2a_1}{i\varkappa c^3}\mu\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

welches giebt:

$$a_1 = \frac{\varkappa^2 c^3 (\sigma - \sigma')}{\sigma + 2\sigma'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

In von der Kugel entfernten Punkten wird die von der letzteren herrührende Störung ausgedrückt durch:

$$\psi = \frac{1}{r} e^{i\varkappa(at - r)} \{a_0 + a_1 \mu\}$$

$$= -\frac{\varkappa^2 c^3}{3r} e^{i\varkappa(at - r)} \left\{\frac{m' - m}{m'} + 3\,\frac{\sigma' - \sigma}{\sigma + 2\sigma'}\mu\right\} \quad \ldots \quad (12).$$

Führen wir folgende Relation ein:

$$T = \frac{4\pi c^3}{3}, \quad \varkappa = 2\pi : \lambda,$$

und werfen den imaginären Theil weg, so ergiebt sich:

$$\psi = -\frac{\pi T}{\lambda^2 r}\left\{\frac{m' - m}{m'} + 3\,\frac{\sigma' - \sigma}{\sigma + 2\sigma'}\mu\right\} \cos \varkappa (at - r) \ldots (13),$$

als der Ausdruck für den wichtigsten Theil der Störung, welche Beziehung der Gleichung (21) §. 334 für eine feste starre Kugel entspricht. Es ergiebt sich, wie erwartet werden konnte, dass das Glied von der Ordnung Null von der Veränderung in der Zusammendrückbarkeit und das von der Ordnung Eins von der Veränderung der Dichtigkeit abhängt.

Aus (13) können wir wieder auf den Fall einer starren, festen Kugel zurückkommen, indem wir sowohl σ' wie m' unendlich machen. Es reicht nicht hin, σ' allein unendlich zu machen, offenbar nicht, weil, wenn m' zu gleicher Zeit endlich bleibt, $\varkappa' c$ nicht klein sein würde, wie die Untersuchung angenommen hat.

Wenn $m' - m$ und $\sigma' - \sigma$ klein sind, so wird (13) äquivalent mit:

$$\psi = -\frac{\pi T}{\lambda^2 r}\left\{\frac{m' - m}{m} + \frac{\sigma' - \sigma}{\sigma}\mu\right\} \cos \varkappa (at - r),$$

entsprechend $\varphi = \cos \varkappa at$ im Mittelpunkte der Kugel. Dieses stimmt mit dem Resultate (13) des §. 296, in welchem das Hinderniss eine beliebige Gestalt haben konnte.

Bei wirklichen Gasen ist $m' = m$, und das Glied von der Ordnung Null verschwindet. Ist das Gas, welches den kugelförmigen Raum einnimmt, unverhältnissmässig leichter, wie das andere Gas, so ist $\sigma' = 0$ und:

$$\psi = 3\,\frac{\pi T}{\lambda^2 r}\,\mu \cos \varkappa (at - r) \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

so dass in dem Gliede von der Ordnung Eins die Wirkung die doppelte von der einer starren Kugel ist und das entgegengesetzte Zeichen hat.

Der grössere Theil dieses Capitels ist zwei Arbeiten des Autors: „Ueber die Schwingungen eines Gases, das in einer starren kugelförmigen Hülle enthalten ist“ und: „Untersuchung der Störung, welche ein kugelförmiges Hinderniss auf Schallwellen ausübt“ [1]), entnommen, sowie der schon erwähnten Arbeit von Professor Stokes.

---

[1]) Math. Society's Proceedings, March 14, 1872; Nov. 14, 1872.

Capitel XVIII.

Kugelförmige Luftschalen. Bewegung in zwei Dimensionen.

336. In einem der früheren Capitel (§. 135) sahen wir, dass ein Beweis des Fourier'schen Satzes erhalten werden kann, wenn man den Mechanismus einer schwingenden Saite betrachtet. Eine analoge Behandlung des Problemes einer kugelförmigen Luftschale wird uns zu einem Beweise der Laplace'schen Entwickelung einer Function führen, die in jedem Punkte einer Kugeloberfläche willkürlich ist.

Die auf die gewöhnlichen Polarcoordinaten ϑ, ω bezogene Continuitätsgleichung nimmt, wie in §. 333, wenn ψ das Geschwindigkeitspotential ist, die Form an:

$$c^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} = a^2 \left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\psi}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2\psi}{d\omega^2}\right\}.$$

Welches auch der Charakter der freien Bewegung sein mag, dieselbe lässt sich immer in eine Reihe von einfachen harmonischen Schwingungen auflösen, deren Natur für jede derselben durch die entsprechenden Functionen ψ, letztere als abhängig vom Raume betrachtet, bestimmt ist. Somit lautet, wenn $\psi \propto e^{i\varkappa a t}$, die Gleichung zur Bestimmung von ψ als eine Function von ϑ und ω:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\psi}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2\psi}{d\omega^2} + \varkappa^2 c^2\psi = 0 \ldots (1).$$

Weiter lässt sich ψ, welche Function dasselbe auch sein mag, nach dem Fourier'schen Satze[1]) in eine Reihe der Sinusse und Cosinusse der Vielfachen von ω entwickeln. Somit:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \cos\omega + \psi_1' \sin\omega + \psi_2 \cos 2\omega + \psi_2' \sin 2\omega$$
$$+ \ldots + \psi_s \cos s\omega + \psi_s' \sin s\omega + \ldots \ldots \quad (2),$$

worin die Coefficienten $\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_1', \psi_2'$ Functionen von ϑ allein sind, und nach der conjugirten Eigenschaft der Kreisfunctionen jedes Glied der Reihe die Gleichung unabhängig für sich erfüllen muss. Demgemäss ist:

$$\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{d\psi_s}{d\vartheta}\right) - \frac{s^2\psi_s}{\sin^2\vartheta} + \varkappa^2 c^2 \psi_s = 0 \quad \ldots (3)$$

die Gleichung, aus welcher der Charakter von ψ_s oder ψ_s' bestimmt werden kann. Diese Gleichung lässt sich auf verschiedene Weise schreiben.

In Werthen von μ ($= \cos\vartheta$):

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d\psi_s}{d\mu}\right\} + h^2\psi_s - \frac{s^2}{1-\mu^2}\psi_s = 0 \quad \ldots (4);$$

oder, wenn $\nu = \sin\vartheta$:

$$\nu^2(1-\nu^2)\frac{d^2\psi_s}{d\nu^2} + \nu(1-2\nu^2)\frac{d\psi_s}{d\nu} + \nu^2 h^2 \psi_s - s^2\psi_s = 0 \ldots (5),$$

worin h^2 für $\varkappa^2 c^2$ geschrieben ist.

Wenn die Originalfunction ψ symmetrisch mit Bezug auf den Pol ist, d. h. von der Breite allein abhängt, so verschwindet s und die Gleichungen vereinfachen sich. Diesen Fall dürften wir zweckmässig zuerst nehmen. In Werthen von μ haben wir:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\psi_0}{d\mu^2} - 2\mu\frac{d\psi_0}{d\mu} + h^2\psi_0 = 0 \quad \ldots (6).$$

Die Auflösung dieser Gleichung enthält zwei willkürliche Constanten, welche mit zwei bestimmten Functionen von μ multiplicirt sind; sie kann auf die gewöhnliche Weise erhalten werden durch Aufstellung einer aufsteigenden Reihe und Be-

---

[1]) Wir führen hier die Bedingung ein, dass ψ nach einer Umdrehung um die Kugel seinen früheren Werth wieder annimmt.

stimmung der Exponenten und Coefficienten durch Substitution. Somit:

$$\psi_0 = A\left\{1 - \frac{h^2}{1.2}\mu^2 + \frac{h^2(h^2-2.3)}{1.2.3.4}\mu^4 - \frac{h^2(h^2-2.3)(h^2-4.5)}{1.2.3.4.5.6}\mu^6 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ B\left\{\mu - \frac{h^2-1.2}{1.2.3}\mu^3 + \frac{(h^2-1.2)(h^2-3.4)}{1.2.3.4.5}\mu^5 - \text{etc.}\right\} \quad \ldots (7),$$

worin A und B willkürliche Constanten sind.

Wir wollen weiter annehmen, dass ψ ausser symmetrisch um den Pol zu sein, ebenso symmetrisch mit Bezug auf den Aequator ist (welcher demgemäss eine Knotenfläche wird) oder in anderen Worten, dass ψ eine gerade Function des Sinus der Breite (μ) ist. Unter diesen Umständen wird es klar, dass B verschwinden muss, und der Werth von ψ einfach durch die erste Reihe multiplicirt mit der willkürlichen Constanten A ausgedrückt wird. Dieser Werth des Geschwindigkeitspotentiales ist die logische Consequenz der ursprünglichen Differentialgleichung und der beiden Beschränkungen in Bezug auf die Symmetrie. Der Werth von h^2 kann willkürlich erscheinen, aber es ist aus dem, was wir von dem Mechanismus der Frage kennen, von vornherein sicher, dass h^2 wesentlich auf eine Reihe von Einzelwerthen begrenzt ist. Die Bedingung, welche noch einzuführen bleibt, und durch welche h bestimmt wird, ist die, dass die ursprüngliche Gleichung im Pole selbst erfüllt werden muss, oder in anderen Worten, dass der Pol keine Quelle ist. Dieser Umstand erfordert es, den Werth der Reihe für $\mu = 1$ zu betrachten. Da die Reihe eine gerade Function von μ ist, so wird, wenn der Pol $\mu = +1$ keine Quelle ist, auch der Pol $\mu = -1$ keine sein. Es liegt sofort auf der Hand, dass, wenn h^2 die Form $n(n+1)$ hat, wo n eine gerade ganze Zahl ist, die Reihe ein Ende findet und daher für $\mu = 1$ endlich bleibt; was wir aber nun zu beweisen haben, ist das, dass h^2, wenn die Reihe für $\mu = 1$ endlich

bleibt, nothwendiger Weise die obige Form hat. Nach der gewöhnlichen Regel ergiebt sich sofort, dass sich, welches auch der Werth von h^2 sein mag, das Verhältniss der aufeinander folgenden Glieder der Grenze μ^2 nähert, und dass deshalb die Reihe für alle Werthe von μ kleiner wie Eins convergent ist. Für den äussersten Werth $\mu = 1$ ist indessen eine höhere Untersuchungsmethode nothwendig.

Es ist bekannt[1]), dass die unendliche hypergeometrische Reihe:

$$1 + \frac{ab}{cd} + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\,d(d+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\,d(d+1)(d+2)} + \ldots \quad (8)$$

convergent ausfällt, wenn $c + d - a - b$ grösser wird wie 1, und divergent, wenn $c + d - a - b$ gleich oder kleiner wie 1. In dem letzten Falle giebt der Werth von $c + d - a - b$ ein Criterium für den Grad der Divergenz. Von zwei divergenten Reihen von der obigen Form, für welche die Werthe von $c + d - a - b$ verschieden sind, ist diejenige relativ unendlich, für welche der Werth von $c + d - a - b$ den kleineren Werth hat.

Unsere hier vorliegende Reihe (7) kann auf die Normalform zurückgeführt werden, indem man $h^2 = n(n+1)$ nimmt, wo n nicht ganz zu sein braucht. Somit:

$$1 - \frac{h^2}{1.2}\mu^2 + \frac{h^2(h^2 - 2.3)}{1.2.3.4}\mu^4 - \ldots$$

$$= 1 - \frac{n(n+1)}{1.2}\mu^2 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\mu^4 - \ldots$$

$$= 1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{1 \cdot \frac{1}{2}}\mu^2$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)\left(-\frac{1}{2}n + 1\right)\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + 1\right)}{1.2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}\mu^4 + \ldots (9),$$

---

[1]) Boole's Finite Differences, p. 79.

welche Gleichung die Normalform hat, wenn:

$$a = -\frac{1}{2}n, \quad b = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = 1.$$

Demgemäss ist die Reihe, wenn $c + d - a - b = 1$, für $\mu = 1$ divergent, ausgenommen den Fall, wo sie ein Ende hat. Sie hat ein Ende nur, wenn n eine gerade ganze Zahl ist. Wir sind daher zu dem Schlusse geführt, dass h^2, wenn der Pol keine Quelle und ψ_0 eine gerade Function von μ ist, die Form $n(n+1)$ haben muss, wo n eine gerade ganze Zahl ist.

Auf gleiche Weise können wir beweisen, dass, wenn ψ_0 eine ungerade Function von μ und die Pole keine Quellen sind, $A = 0$ und h^2 von der Form $n(n+1)$ sein muss, wo n eine ungerade ganze Zahl ist.

Wenn n ein Bruch ist, so sind beide Reihen für $\mu = \pm 1$ divergent; obwohl sich eine Combination beider finden lässt, welche in dem einen oder anderen Pole endlich bleibt, so kann doch keine Combination vorhanden sein, welche in beiden Polen endlich bleibt. Wenn demnach eine Bedingung lautet, dass kein Punkt auf der Oberfläche der Kugel eine Quelle ist, so haben wir nur die Alternative n ganz zu machen, und selbst dann noch sichern wir nicht die Endlichkeit an den Polen, wenn wir nicht weiter annehmen, $A = 0$ für ein ungerades n und $B = 0$ für ein gerades n. Wir schliessen daraus, dass für eine vollständige kugelförmige Schale die allein zulässigen Werthe von ψ, welche Functionen der Breite allein und proportional den trigonometrischen Functionen von der Zeit sind, eingeschlossen sein müssen in der Form:

$$\psi = CP_n(\mu),$$

wo $P_n(\mu)$ die Legendre'sche Function und n irgend eine ungerade oder gerade ganze Zahl bedeutet. Die Möglichkeit der Entwickelung einer willkürlichen Function der Breite in eine Reihe von Legendre'schen Functionen ist eine nothwendige Folge von dem, was eben bewiesen ist. Jede mögliche Bewegung der Gasschicht wird dargestellt durch die Reihe:

$$\psi = A_0 + P_1(\mu)\left(A_1 \cos\frac{\sqrt{1.2}\,at}{c} + B_1 \sin\frac{\sqrt{1.2}\,at}{c}\right) + \dots$$

$$+ P_n(\mu)\left(A_n \cos\frac{\sqrt{n(n+1)}\,at}{c} + B_n \sin\frac{\sqrt{n(n+1)}\,at}{c}\right) + \dots (10).$$

Für $t = 0$ ist:

$$\psi = A_0 + A_1 P_1(\mu) + \dots + A_n P_n(\mu) + \dots (11),$$

und der Werth von ψ für $t = 0$ ist eine willkürliche Function der Breite.

Die Methode, welcher wir hier gefolgt sind, hat auch den Vortheil, die conjugirte Eigenschaft:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, P_m(\mu)\, d\mu = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

zu beweisen, wo n und m verschiedene ganze Zahlen sind. Denn die Functionen $P(\mu)$ sind die Normalfunctionen (§. 94) für das betrachtete schwingende System und demgemäss kann der Ausdruck für die kinetische Energie nur die Quadrate der verallgemeinerten Geschwindigkeiten enthalten. Wenn (12) nicht gültig ist, so müssen gleichfalls die Producte der Geschwindigkeiten auftreten.

Der Werth von ψ, welcher einer ebenen Schicht eines schwingenden Gases zukommt, lässt sich natürlich als Specialfall der allgemeinen, auf eine kugelförmige Schicht anwendbaren Lösung ableiten. Beschränken wir uns auf den Fall, wo im Pole ($\mu = 1$) keine Quelle liegt, so haben wir die Grenzform von $\psi = CP_n(\mu)$ zu untersuchen, wo $n(n+1) = \varkappa^2 c^2$, wenn c^2 und n^2 unendlich sind. Zur selben Zeit sind $\mu - 1$ und ν unendlich klein, und $c\nu$ geht in den ebenen Polarradius (r) über, so dass $n\nu = \varkappa r$. Zu diesem Behufe ist die zweckmässigste Form für $P_n(\mu)$ die von Murphy[1]):

---

[1]) Thomson und Tait's Theoret. Phys. §. 782 $\left[t = \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta,\right.$ nicht $\left.4 \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta\right]$. Todhunter's Laplace's Functions, §. 19.

$$P_n(\cos\vartheta) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$
$$+ \frac{(n-1)\,n(n+1)\,(n+2)}{1^2\,.\,2^2} \sin^4 \frac{\vartheta}{2} - \ldots \quad (13).$$

Die Grenze wird ersichtlich:

$$\psi = C\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2^2} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2^2.4^2} - \frac{\varkappa^6 r^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right\} = CJ_0(\varkappa r) \ldots (14);$$

sie zeigt, dass die Bessel'sche Function von der Ordnung Null ein extremer Fall der Legendre'schen Functionen ist.

Wenn die sphärische Schale nicht vollständig ist, so erfordert das Problem eine andere Behandlung. So wird, wenn das Gas durch Wände begrenzt wird, welche sich längs zweier Breitenparallelen erstrecken, das vollständige Integral, das im Allgemeinen zwei willkürliche Constante enthält, nöthig sein. Das Verhältniss der Constanten und der zulässigen Werthe von h^2 sind durch die beiden Grenzbedingungen zu bestimmen, welche ausdrücken, dass bei den beiden in Frage kommenden Parallelen die Bewegung ganz nach der Länge geschieht. Da die Werthe von μ überall numerisch kleiner wie Eins sind, so sind die Reihen immer convergent.

Wenn der Theil der Oberfläche, welcher von dem Gase eingenommen wird, derjenige zwischen zwei Breitenparallelen in gleichen Abständen von dem Aequator ist, so wird die Frage einfacher, da dann eine oder die andere der Constanten A und B in (7) bei jeder Normalfunction verschwindet.

337. Schliesst die ins Auge gefasste sphärische Fläche einen Pol ein, so haben wir, wie bei einer vollständigen Kugel, die Bedingung einzuführen, dass der Pol keine Quelle ist. Zu diesem Zwecke wird die Lösung in Werthen von ν, d. i. $\sin\vartheta$, zweckmässiger sein.

Beschränken wir uns für den Augenblick auf den Fall von Symmetrie, so haben wir, indem wir in (5) §. 336 $s = 0$ setzeu:

$$\nu(1-\nu^2)\frac{d^2\psi_0}{d\nu^2} + (1-2\nu^2)\frac{d\psi_0}{d\nu} + h^2\nu\psi_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Eine Lösung dieser Gleichung erhält man leicht auf dem gewöhnlichen Wege, indem man eine aufsteigende Reihe nimmt, und dieselbe in die Differentialgleichung einsetzt zur Bestimmung der Exponenten und Coefficienten. Wir erhalten [1]):

$$\psi_0 = A\left\{1 + \frac{0\,.\,1 - h^2}{2^2}\nu^2 + \frac{(0\,.\,1 - h^2)(2\,.\,3 - h^2)}{2^2\,.\,4^2}\nu^4 \right.$$
$$\left. + \frac{(0\,.\,1 - h^2)(2\,.\,3 - h^2)(4\,.\,5 - h^2)}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}\nu^6 + \ldots\right\} \ldots (2).$$

Dieser Werth von ψ_0 ist die allgemeinste Lösung von (1), welche der Bedingung der Endlichkeit für $\nu = 0$ unterliegt. Die vollständige Lösung, welche zwei willkürliche Constanten enthält, gilt für eine Quelle von beliebiger Intensität in dem Pole, in welchem Falle der Werth von ψ_0 für $\nu = 0$ unendlich ist. Jede Lösung, welche für $\nu = 0$ endlich bleibt und eine willkürliche Constante enthält, ist daher die allgemeinste mögliche unter der Einschränkung, dass der Pol keine Quelle ist. Demgemäss ist es für unseren Zweck unnöthig, die Lösung zu vervollständigen. Die Natur der zweiten Function (welche einen Logarithmus von ν enthält) wird in dem speciellen Falle einer ebenen Schicht illustrirt, der sogleich betrachtet wird.

Indem wir $n(n+1)$ für h^2 schreiben, wird die Reihe innerhalb der Klammern:

$$1 - \frac{n(n+1)}{2^2}\nu^2 + \frac{(n-2)\,n(n+1)(n+3)}{2^2\,.\,4^2}\nu^2 - \ldots (3),$$

oder, reducirt auf die hypergeometrische Normalform:

$$1 + \frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{1\,.\,1}\nu^2$$
$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}n\right)\left(-\frac{1}{2}n + 1\right)\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + 1\right)}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2}\nu^4 + \ldots,$$

entsprechend:

$$a = -\frac{1}{2}n,\quad b = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2},\quad c = 1,\quad d = 1.$$

---

[1]) Heine's Kugelfunctionen, §. 28.

Da $c + d - a - b = \frac{3}{2}$, so convergirt die Reihe für alle Werthe von ν von 0 bis 1 inclusive. Auf Werthe von ϑ (= *arc sin* ν) grösser wie $\frac{1}{2}\,\pi$ ist die Lösung nicht anwendbar.

Für ein ganzzahliges n wird die Reihe identisch mit der Legendre'schen Function $P_n(\mu)$. Ist die ganze Zahl gerade, so geht die Reihe zu Ende, sonst aber bleibt sie unendlich. Somit ist, wenn $n = 1$, die Reihe identisch mit der Entwickelung von μ, resp. $\sqrt{(1 - \nu^2)}$, nach Potenzen von ν^2.

Der Ausdruck für ψ in Werthen von ν lässt sich zweckmässig anwenden auf die Untersuchung der freien symmetrischen Schwingungen einer kugelförmigen Luftschicht, die begrenzt wird von einem kleinen Kreise, dessen Radius kleiner ist wie der Quadrant. Die zu erfüllende Bedingung lautet einfach $\frac{d\psi}{d\nu} = 0$, eine Gleichung, durch welche die möglichen Werthe von h^2 oder $\varkappa^2 c^2$ mit dem gegebenen Grenzwerthe von ν verbunden sind.

Gewisse specielle Fälle dieses Problemes lassen sich mittelst der Legendre'schen Functionen behandeln. Nehmen wir z. B. an, dass $n = 6$, so dass $h^2 = \varkappa^2 c^2 = 42$. Die entsprechende Lösung lautet $\psi = A P_6(\mu)$. Der grösste Werth von μ, für welchen $\frac{d\psi}{d\mu} = 0$, ist 0,8302 entsprechend $\vartheta = 33^0\,53' = 0{,}59137$ Radians[1]).

Nehmen wir $c\vartheta = r$, so dass r der Radius des kleinen Kreises gemessen längs der Kugelfläche ist, so erhalten wir:

$$\varkappa r = \sqrt{(42)}\,.\,0{,}59137 = 3{,}8325,$$

welches die Gleichung ist, die den Werth von $\varkappa (= 2\pi\lambda^{-1})$ mit dem gekrümmten Radius r verbindet für einen kleinen Kreis, dessen Winkelradius ist $33^0\,53'$. Ist die Schicht eben (§. 339), so wird der Werth von $\varkappa r$ gleich 3,8317 sein; somit macht es keinen merklichen Unterschied in der Höhe des tief-

[1]) Der Radian ist die Einheit des Maasses für den Kreisumfang.

sten Tones, ob der Radius (r) von gegebener Länge gerade oder zu einem Bogen von 33° gekrümmt ist. Das Resultat der Vergleichung würde indessen wesentlich anders ausfallen, wenn wir die Länge des Kreisumfanges in den beiden Fällen als dieselbe nehmen würden, d. i. $c\vartheta = r$ durch $c\nu = r$ ersetzen wollten.

Um die symmetrische Lösung für eine ebene Schicht abzuleiten, ist es nur nöthig, c unendlich gross zu machen, während $c\nu$ endlich bleibt. Wegen des unendlichen Werthes von h^2 nimmt die Lösung die einfache Form an:

$$\psi = A\left\{1 - \frac{h^2\nu^2}{2^2} + \frac{h^4\nu^4}{2^2.4^2} - \frac{h^6\nu^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right\} \ldots (4),$$

oder, wenn wir $c\nu = r$ schreiben, wo r der Polarradius für zwei Dimensionen ist:

$$\psi = A\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2^2} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2^2.4^2} - \ldots\right\} = A J_0(\varkappa r) \ldots (5),$$

wie in (14) §. 336.

Die Differentialgleichung für ψ in Werthen von ν, wenn c unendlich und $c\nu = r$, wird:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \varkappa^2\psi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Eine von dem Vorigen unabhängige Untersuchung und Lösung des Problemes einer ebenen Schicht wird gleich gegeben.

338. Ist s verschieden von Null, so lautet die Differentialgleichung, welche von den Coefficienten von $\sin s\omega$, $\cos s\omega$ erfüllt wird:

$$\nu^2(1-\nu^2)\frac{d^2\psi_s}{d\nu^2} + \nu(1-2\nu^2)\frac{d\psi_s}{d\nu} + \nu^2h^2\psi_s - s^2\psi_s = 0 \ldots (1),$$

und man findet für die Lösung, die der Bedingung der Endlichkeit für $\nu = 0$[1]) unterliegt, leicht:

[1]) Die Lösung kann durch Hinzufügung einer zweiten Function vervollständigt werden, welche aus (2) durch Aenderung des Zeichens von s, das in (1) nur als s^2 auftritt, abgeleitet wird; doch ist eine Modification nöthig für den Fall, wo s eine positive ganze Zahl wird. Für den modus procedendi wird gleich in dem Falle der ebenen Schicht ein Beispiel gegeben.

$$\psi_s = A v^s \left\{ 1 + \frac{s(s+1) - h^2}{2(2s+2)} v^2 \right.$$

$$\left. + \frac{s(s+1) - h^2}{2(2s+2)} \cdot \frac{(s+2)(s+3) - h^2}{4(2s+4)} v^4 + \ldots \right\};$$

oder, wenn wir $h^2 = n(n+1)$ setzen:

$$\psi_s = A v^s \left\{ 1 + \frac{(s-n)(s+n+1)}{2.(2s+2)} v^2 \right.$$

$$\left. + \frac{(s-n)(s-n+2)(s+n+1)(s+n+3)}{2.4.(2s+2)(2s+4)} v^4 + \ldots \right\} \ldots (2).$$

Wir haben hier die vollständige Lösung des Problemes der Schwingungen einer kugelförmigen Gasschicht, welche von einem kleinen Kreise begrenzt wird, dessen Radius kleiner wie der Quadrant ist. Für jeden Werth von s giebt es eine Reihe von möglichen Werthen von n, die durch die Bedingung $\frac{d\psi_s}{dv} = 0$ bestimmt sind; mit jedem dieser Werthe von n wird die Function auf der rechten Seite von (2), wenn sie mit $\cos s\omega$ oder $\sin s\omega$ multiplicirt ist, eine Normalfunction des Systemes. Das Aggregat aller Normalfunctionen, die jedem zulässigen Werthe von s und n entsprechen, mit einem einer jeden derselben vorgesetzten willkürlichen Constanten giebt einen Ausdruck, der sich mit dem Anfangswerthe von ψ, d. i. mit einer willkürlich auf der Fläche des kleinen Kreises vertheilten Function, identificiren lässt.

Ist der Radius der Kugel c unendlich gross, so wird h^2 unendlich. Ist $cv = r$, so wird $h^2 v^2 = \varkappa^2 r^2$ und geht über in (2):

$$\psi_s = A' r^s \left\{ 1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2 \cdot (2s+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa^4 r^4}{2 \cdot 4 \cdot (2s+2)(2s+4)} - \ldots \right\} \ldots (3),$$

eine Function von r proportional mit $J_s(\varkappa r)$.

In Werthen von μ lautet die Differentialgleichung, welche durch die Coefficienten von $\cos s\omega$ oder $\sin s\omega$ erfüllt wird:

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d\psi_s}{d\mu}\right\} + h^2\psi_s - \frac{s^2}{1-\mu^2}\psi_s = 0 \ldots (4).$$

Nehmen wir $\psi_s = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}s} \varphi_s$ an, so ergiebt sich als Gleichung für φ_s:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2\varphi_s}{d\mu^2} - 2(s+1)\mu\frac{d\varphi_s}{d\mu} + \{h^2 - s(s+1)\}\varphi_s = 0 \ldots (5),$$

welche leichter zu behandeln ist.

Um dieselbe zu lösen, möge sein:

$\varphi_s = \mu^a + a_2\mu^{a+2} + a_4\mu^{a+4} + \ldots + a_{2m}\mu^{a+2m} + \ldots,$

wir setzen diesen Werth dann in (5) ein. Der Coefficient der niedrigsten Potenz von μ ist $\alpha(\alpha - 1)$; so dass $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$. Die Beziehung zwischen a_{2m+2} und a_{2m}, welche durch Gleichsetzung des Coefficienten von $\mu^{\alpha+2\mu}$ gleich Null erhalten wird, lautet:

$$a_{2m+2} = a_{2m}\frac{(\alpha + 2m + s - n)(\alpha + 2m + s + n + 1)}{(\alpha + 2m + 1)(\alpha + 2m + 2)},$$

worin $n(n+1) = h^2$.

Der vollständige Werth von φ_s wird demgemäss gegeben durch:

$$\varphi_s = A\left\{1 + \frac{(s-n)(s+n+1)}{1.2}\mu^2 + \frac{(s-n)(s-n+2)(s+n+1)(s+n+3)}{1.2.3.4}\mu^4 + \frac{(s-n)(s-n+2)(s-n+4)(s+n+1)(s+n+3)(s+n+5)}{1.2.3.4.5.6}\mu^6 + \ldots\right\}$$
$$+ B\left\{\mu + \frac{(s-n+1)(s+n+2)}{2.3}\mu^3 + \frac{(s-n+1)(s-n+3)(s+n+2)(s+n+4)}{2.3.4.5}\mu^5 + \ldots\right\} \ldots (6),$$

worin A und B willkürliche Constanten sind, und:

$$\psi^s = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}s}\varphi_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Wir haben nun zu beweisen, dass die Bedingung, dass keiner der Pole eine Quelle ist, erfordert, dass $n - s$ eine positive ganze Zahl ist, in welchem Falle die eine oder andere der Reihen in dem Ausdrucke für φ_s ein Ende hat. Zu diesem Zwecke wird es nicht hinreichen, zu zeigen, dass die Reihen (es

sei denn, dass dieselben aus einer endlichen Zahl von Gliedern bestehen) für $\mu = \pm 1$ unendlich werden; es ist auch nothwendig, zu beweisen, dass dieselben nach Multiplication mit $(1 - \mu^2)^{1/2 s}$ divergent bleiben, oder, wie wir es zweckmässiger ausdrücken können, dass dieselben im Vergleich mit $(1 - \mu^2)^{-1/2 s}$ unendlich sind, wenn $\mu = \pm 1$. Es wird genügen, den Fall der ersten Reihe im Einzelnen zu betrachten.

Wir haben:

$$1 + \frac{(s-n)(s+n+1)}{1\,.\,2}$$
$$+ \frac{(s-n)(s-n+2)(s+n+1)(s+n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{1 \cdot \frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}n + 1\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + 1\right)}{1\,.\,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} + \ldots,$$

welche die Normalform (8) §. 336 hat:

$$1 - \frac{ab}{cd} + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\,d(d+1)} + \ldots,$$

wenn:

$$a = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}n, \quad b = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad d = \frac{1}{2}.$$

Der Grad der Divergenz wird durch den Werth von $a + b - c - d$ bestimmt, welcher hier gleich $s - 1$ ist.

Auf der anderen Seite giebt der binomische Lehrsatz für die Entwickelung von $(1 - \mu^2)^{-1/2 s}$:

$$1 + \frac{\frac{1}{2}s}{1}\mu^2 + \frac{\frac{1}{2}s\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}{1\,.\,2}\mu^4 + \ldots,$$

welche Gleichung die Normalform hat, wenn ist:

$a = \frac{1}{2}s$, $c = 1$, $b = d$, was macht $a + b - c - d = \frac{1}{2}s - 1$.

Da $s - 1 > \frac{1}{2} s - 1$, so folgt hieraus, dass die Reihen in der Entwickelung für φ_s unendliche von einer höheren Ordnung wie $(1 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}s}$ sind und daher nach Multiplication mit $(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}s}$ unendlich bleiben. Demgemäss kann ψ_s nicht an beiden Polen endlich sein, wenn nicht die eine oder andere der Reihen endigt, was nur eintreten kann, wenn $n - s$ gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl ist. Ist die ganze Zahl gerade, so haben wir noch anzunehmen $B = 0$, und wenn die ganze Zahl ungerade, $A = 0$, um in den Polen Endlichkeit zu sichern.

In jedem dieser Fälle lässt sich der Werth von φ_s für die vollständige Kugel in folgende Form bringen:

$$\varphi_s = \frac{d^{n+s}}{d\mu^{n+s}} (1 - \mu^2)^n = \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s} \quad . \; . \; . \quad (8),$$

worin der constante Factor weggelassen ist. Der vollständige Ausdruck für denjenigen Theil von ψ, welcher $\cos s\omega$ oder $\sin s\omega$ als Factor enthält, lautet daher:

$$\psi = \frac{\cos s\omega}{\sin s\omega} \sum_{n=s}^{n=\infty} A_n v^s \frac{d^s}{d\mu^s} P_n(\mu) \quad . \; . \; . \; . \quad (9),$$

worin A_n eine Constante mit Bezug auf μ und ω ist, aber als Function von der Zeit sich ändert wie:

$$\cos\left(\frac{\sqrt{(n \,.\, n + 1)}\, at}{c} + \varepsilon\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Für die meisten Zwecke ist es indessen zweckmässiger, lieber die Glieder zusammen zu fassen, welche dasselbe n haben als diejenigen, für welche s denselben Werth hat. So haben wir für jeden Werth von n:

$$\psi = \sum_{s=0}^{s=n} v^s \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s} (A_s \cos s\omega + B_s \sin s\omega) \; . \; . \; . \; (11),$$

worin jeder Coefficient A_s, B_s einen Zeitfactor von der Form (10) enthalten kann.

Im Anfange ist ψ eine willkürliche Function von μ und ω, und daher lässt sich eine jede solche Function darstellen in folgender Form:

$$\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=0}^{s=n} \nu^s \frac{d^s P_n(\mu)}{d\mu^s} (A_s^n \cos s\omega + B_s^n \sin s\omega) \ldots (12),$$

welches die Laplace'sche Entwickelung nach harmonischen Kugelfunctionen ist.

Aus der Differentialgleichung (5) oder aus ihrer allgemeinen Lösung (6) lässt sich leicht beweisen, dass φ_s dieselbe Form hat wie $\frac{d}{d\mu}\varphi_{s-1}$, so dass wir schreiben dürfen:

$$\varphi_s = \left(\frac{d}{d\mu}\right)^s \varphi_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

(in welcher Gleichung keine Beziehung zwischen den willkürlichen Constanten behauptet ist), oder in Werthen von ψ nach (7):

$$\psi_s = (1 - \mu^2)^{1/2 s} \left(\frac{d}{d\mu}\right)^s \psi_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Gleichung (13) ist eine Verallgemeinerung der in (8) benutzten Eigenschaft der Laplace'schen Functionen.

Die entsprechenden Beziehungen lassen sich für das Pro blem der Ebene wie vorher ableiten, indem man n, welches in (13) und (14) willkürlich ist, einen unendlichen Werth beilegt, und schreibt $n\nu = \varkappa r$. Da $\mu^2 + \nu^2 = 1$, so haben wir:

$$\psi_s = \nu^s \left(-\frac{\mu}{\nu}\frac{d}{d\nu}\right)^s \psi_0,$$

wo ψ_s als eine Function von ν angesehen wird. An der Grenze kann μ (selbst wenn es der Differentiation unterliegt) mit der Einheit identificirt werden, und so können wir setzen:

$$\psi_s = (-2\varkappa r)^s \left(\frac{d}{d\,.\,(\varkappa r)^2}\right)^s \psi_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Ist der Pol keine Quelle, so ist ψ_s proportional mit $J_s(\varkappa r)$. Der constante Coefficient, welcher durch (15) unbestimmt gelassen wird, kann leicht durch eine Vergleichung der Hauptglieder gefunden werden. Es ergiebt sich dann, dass:

$$J_s(\varkappa r) = (-2\varkappa r)^s \left(\frac{d}{d\,.\,(\varkappa r)^2}\right)^s J_0(\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

eine wohlbekannte Eigenschaft der Bessel'schen Functionen [1]).

[1]) Todhunter's Laplace's Functions, §. 390.

Die Schwingungen einer ebenen Gasschicht lassen sich natürlich leichter behandeln, als die einer Schicht von endlicher Krümmung; ich habe indessen vorgezogen, sowohl die indirecte wie die directe Untersuchungsmethode darzustellen, einmal wegen des Kugelproblemes selbst mit der zugehörigen Laplace'schen Entwickelung[1]) und dann weil der Zusammenhang zwischen den Bessel'schen und Laplace'schen Functionen nicht allgemein begriffen zu sein scheint. Wir können indessen jetzt zu der unabhängigen Behandlung des ebenen Problemes übergehen.

339. Nehmen wir in der allgemeinen Gleichung für einfache luftförmige Schwingungen

$$\nabla^2\psi + \varkappa^2\psi = 0$$

an, dass ψ unabhängig von z ist und führen ebene Polarcoordinaten ein, so erhalten wir (§. 241)

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \varkappa^2\psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

oder, wenn ψ nach der Fourier'schen Reihe entwickelt wird:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_n + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin ψ_n von der Form $A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta$ ist:

$$\frac{d^2\psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi_n}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\psi_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)^{2)}.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form, wie diejenige, mit welcher wir bei der Behandlung kreisförmiger Membranen zu thun hatten (§. 200); der hauptsächliche mathematische Unterschied zwischen den beiden Fragen liegt in der Thatsache, dass während bei den Membranen die an der Grenze zu erfüllende Bedingung lautet $\psi = 0$, in dem vorliegenden Falle das Interesse sich mehr auf die Grenzbedingungen $\frac{d\psi}{dr} = 0$

---

[1]) Ich habe hier grossen Nutzen gehabt durch Heine's Handbuch der Kugelfunctionen, Berlin 1861, und von Sir William Thomson's Aufsatz: „Ueber Laplace's Theorie der Gezeiten, Phil. Mag. IV, 1875".

[2]) Ich kehre hier zu der gebräuchlichen Bezeichnungsweise zurück; der Leser wird aber verstehen, dass das hier auftretende n dem s der vorhergehenden Abschnitte entspricht. Das n der Laplace'schen Functionen ist nun unendlich.

richtet, entsprechend der Begrenzung des Gases durch eine starre cylindrische Hülle.

Da der Pol keine Quelle ist, so lautet die Lösung von (3):

$$\psi_n = A\, J_n(\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

und ebenso die Gleichung, welche in einem Cylinder vom Radius r die möglichen Schwingungsperioden angiebt:

$$J_n'(\varkappa r) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die kleineren Werthe von $\varkappa r$, welche (5) genügen, sind in der folgenden Tabelle [1]) gegeben, die aus den Hansen'schen Tabellen für die Functionen J mittelst der Beziehungen berechnet wurde, welche erlauben J_n in Werthen von J_0 und J_1 auszudrücken:

Anzahl der inneren kreisförmigen Knotenlinien	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0	3,832	1,841	3,054	4,201
1	7,015	5,332	6,705	8,015
2	10,174	8,536	9,965	11,344
3	13,324	11,706		
4	16,471	14,864		
5	19,616	18,016		

Die particularen Lösungen lassen sich schreiben:

$$\psi_n = (A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta)\, J_n(\varkappa r) \cos \varkappa a t$$
$$+ (C \cos n\vartheta + D \sin n\vartheta)\, J_n(\varkappa r) \sin \varkappa a t \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

worin A, B, C, D für jeden zulässigen Werth von n und $\varkappa$ willkürlich sind. Wie in den entsprechenden Problemen für die Kugel und kreisförmige Membran muss die Summe aller Particularlösungen allgemein genug sein, um für $t = 0$ beliebige Werthe von ψ und $\dot{\psi}$ darzustellen.

Als Beispiel einer zusammengesetzten Schwingung können

1) Notes on Bessel's Functions. *Phil. Mag.* Nov. 72.

wir, wie in §. 332, annehmen, dass der Anfangszustand des Gases der durch:

$$\dot{\psi} = 0, \psi = x = r \cos \vartheta$$

definirte ist.

Unter diesen Umständen reducirt sich (6) auf:

$$\psi = A_1 \cos \vartheta\, J_1(\varkappa_1 r) \cos \varkappa_1 a t + A_2 \cos \vartheta\, J_1(\varkappa_2 r) \cos \varkappa_2 a t + \ldots \quad (7);$$

die zulässigen Werthe von $\varkappa$ sind, wenn wir den Radius des Cylinders als Eins nehmen, die Wurzeln von:

$$J_1'(\varkappa) = 0 \quad (8).$$

Die zur Bestimmung des Coefficienten A nöthige Bedingung ist die, dass für alle Werthe von r von $r = 0$ bis $r = 1$:

$$r = A_1 J_1(\varkappa_1 r) + A_2 J_1(\varkappa_2 r) + \ldots \quad (9),$$

woraus, wie in §. 332:

$$A = \frac{2}{(\varkappa^2 - 1) J_1(\varkappa)} \quad (10).$$

Die vollständige Lösung lautet demnach:

$$\psi = \Sigma \frac{2 \cos \vartheta\, J_1(\varkappa r)}{(\varkappa^2 - 1) J_1(\varkappa)} \cos \varkappa a t \quad (11),$$

worin sich die Summation auf alle durch (8) bestimmten Werthe von $\varkappa$ erstreckt.

Setzen wir $t = 0$ und $r = 1$, so erhalten wir aus (9) und (10):

$$\Sigma \frac{2}{\varkappa^2 - 1} = 1 \quad (12),$$

eine Gleichung, welche durch numerische Rechnung oder analytisch auf einem ähnlichen Wege, wie der in dem Falle von (14) §. 332 eingeschlagene, verificirt werden kann.

Wir können beweisen, dass:

$$\log J_1'(z) = constant + \Sigma \log \left(1 - \frac{z^2}{\varkappa^2}\right),$$

woraus durch Differentiation:

$$\frac{J_1''(z)}{J_1'(z)} = -\Sigma \frac{2z}{\varkappa^2 - z^2}.$$

Hieraus ist (12) dadurch abgeleitet, dass man $z = 1$ setzt, und auf die fundamentale Differentialgleichung achtet, der J_1 genügt; dieselbe zeigt, dass:

$$J_1''(1) : J_1'(1) = -1.$$

Bis hierhin haben wir den Cylinder als vollständig angenommen, so dass ψ nach jeder Umdrehung wiederkehrt, was erfordert, dass n eine ganze Zahl ist. Wenn wir aber an Stelle des vollständigen Cylinders den Sector zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \beta$ nehmen, so werden im Allgemeinen Bruchwerthe von n auftreten. Da $\frac{d\psi}{d\vartheta}$ an den beiden Grenzen für ϑ verschwindet, so muss ψ die Form haben:

$$\psi = A \cos(\varkappa a t + \varepsilon) \cos n\vartheta J_n(\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

worin $n = \nu\pi\beta^{-1}$, wobei ν ganzzahlig ist. Ist β ein aliquoter Theil von π (oder π selbst), so enthält die vollständige Lösung nur ganze Werthe von n, wie man vorhersehen konnte; im Allgemeinen müssen aber Functionen von gebrochenen Ordnungen eingeführt werden.

Ein interessantes Beispiel tritt ein für $\beta = 2\pi$, was dem Falle eines Cylinders entspricht, der von einer starren Wand durchschnitten wird, welche sich von dem Mittelpunkte bis zum Umfange erstreckt (vergleiche §. 207). Die Wirkung der Wand ist die: eine Druckdifferenz auf ihren beiden Seiten zu ermöglichen; wenn aber eine derartige Differenz nicht eintritt, so kann die Wand entfernt werden und die Schwingungen fallen unter die Theorie eines vollständigen Cylinders. Dieser Zustand der Dinge tritt für ein gerades ν ein. Wenn ν aber ungerade ist, so hat n die Form: — ganze Zahl $+ \frac{1}{2}$ —; die Drucke auf den beiden Seiten der Wand sind verschieden. In dem letzteren Falle lässt sich J_n in endlichen Gliedern ausdrücken. Den tiefsten Ton erhält man bei $\nu = 1$ oder $n = \frac{1}{2}$, wenn

$$\psi = A \cos(\varkappa a t + \varepsilon) . \cos \frac{1}{2}\vartheta . \frac{\sin \varkappa r}{\sqrt{(\varkappa r)}} \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

die zulässigen Werthe von $\varkappa$ sind die Wurzeln von $tang\, \varkappa = 2\varkappa$. Die erste Wurzel (nach $\varkappa = 0$) ist $\varkappa = 1{,}1655$ entsprechend einem Tone, welcher entschieden tiefer ist, als irgend einer, den der vollständige Cylinder geben kann.

Die vorstehende Rechnung findet eine interessante Anwendung auf das mathematisch analoge Problem der Schwingungen von Wasser in einem cylindrischen Gefässe von gleichförmiger Tiefe. Der Leser möge eine Arbeit des Autors über Wellen im Philosophical Magazine für April 1876 nachsehen, sowie Arbeiten von Prof. Guthrie, auf welche dort Bezug genommen ist. Die Beobachtung der Schwingungsdauer ist sehr leicht; auf diese Weise lässt sich eine experimentelle Lösung von Problemen erhalten, deren theoretische Behandlung weit ausserhalb der Macht der bekannten Methoden liegt.

340. Kehren wir zum vollständigen Cylinder zurück und nehmen an, dass derselbe durch starre transversale Wände bei $z = 0$ und $z = l$ geschlossen ist; heben dafür die Beschränkung auf, dass die Bewegung in allen transversalen Querschnitten dieselbe sein soll. Die allgemeine Differentialgleichung (12) lautet:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} + \varkappa^2\psi = 0 \quad . \quad (1).$$

Wir wollen ψ nach dem Fourier'schen Satze in folgender Reihe entwickeln:

$$\psi = H_0 + H_1 \cos\frac{\pi z}{l} + H_2 \cos\frac{2\pi z}{l}$$

$$+ \ldots + H_p \cos\left(p\,\frac{\pi z}{l}\right) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin die Coefficienten H_p Functionen von r und ϑ sein können. Diese Form sichert die Erfüllung der Grenzbedingungen für $z = 0$, $z = l$. Jedes Glied muss einzeln die Differentialgleichung erfüllen.

Somit:

$$\frac{d^2 H_p}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_p}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 H_p}{d\vartheta^2} + \left(\varkappa^2 - p^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)H_p = 0 \quad . \; . \quad (3),$$

welche dieselbe Form hat, als wenn die Bewegung unabhängig von z wäre, wobei $\varkappa^2$ durch $\varkappa^2 - p^2\pi^2 l^{-2}$ ersetzt wird. Die particuläre Lösung lässt sich daher schreiben:

$$\psi = (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta) . \cos p\frac{\pi z}{l} \cdot J_n\left(\sqrt{\varkappa^2 - p^2\pi^2 l^{-2}} . r\right)\cos \varkappa a t$$

$$+ \; (C_n \cos n\vartheta + D_n \sin n\vartheta) \cos p\frac{\pi z}{l}$$

$$. J_n\left(\sqrt{\varkappa^2 - p^2\pi^2 l^{-2}} . r\right)\sin \varkappa a t \ldots (4);$$

dieselbe muss durch eine dreifache Summation mit Bezug auf alle ganzen Werthe von p und n und mit Bezug auf alle diejenigen Werthe von $\varkappa$ verallgemeinert werden, welche durch die Gleichung:

$$J_n'\left(\sqrt{\varkappa^2 - p^2\pi^2 l^{-2}} \cdot r\right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

bestimmt werden.

Ist $r = 1$ und bezeichnet K die in der Tabelle (§. 339) gegebenen Werthe von $\varkappa$, welche rein transversalen Schwingungen entsprechen, so haben wir:

$$\varkappa^2 = K^2 + p^2\frac{\pi^2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Die rein axialen Schwingungen entsprechen dem Werthe Null für K, der in der Tabelle nicht enthalten ist.

341. Das vollständige Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2\psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi_n}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\psi_n = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wenn keine Begrenzung in Betreff der Abwesenheit einer Quelle in dem Pole gemacht wird, schliesst eine zweite Function von r ein, welche durch $J_{-n}(\varkappa r)$ bezeichnet werden mag. Somit können wir mit Vernachlässigung unnöthiger constanter Factoren setzen:

$$\psi_n = Ar^{+n}\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2.2+2n} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2.4.2+2n.4+2n} - \dots\right\}$$

$$+ Br^{-n}\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2.2-2n} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2.4.2-2n.4-2n} - \dots\right\} \dots (2),$$

die zweite Reihe erfordert aber eine Modification, wenn n ganzzahlig ist. Für $n = 0$ werden beide Reihen identisch und daher entbehrt das unmittelbare Resultat der Annahme von $n = 0$ in (2) der nöthigen Allgemeinheit. Die gewünschte Lösung lässt sich indessen erhalten nach der gewöhnlichen auf solche Fälle anwendbaren Regel. Bezeichnen wir die Coefficienten von A und B in (2) mit $f(n)$, $f(-n)$, so haben wir:

$$\psi = Af(n) + Bf(-n) = (A+B)f(0)$$
$$+ (A-B)f'(0)n + (A+B)f''(0)\frac{n^2}{1.2} + \dots$$

nach dem Maclaurin'schen Satze. Daher können wir, indem wir neue willkürliche Constanten nehmen, als Grenzform von (2) schreiben:

$$\psi_0 = Af(0) + Bf'(0).$$

In dieser Gleichung ist $f(0)$ gleich $J_0(\varkappa r)$; um $f'(0)$ zu finden haben wir:

$$f'(n) = r^n \log r\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2.2+2n} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2.4.2+2n.4+2n} - \dots\right\}$$
$$+ r^n \frac{d}{dn}\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2.2+2n} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2.4.2+2n.4+2n} - \dots\right\}.$$

Bezeichnet u das allgemeine Glied (welches r^{2m} enthält) der Reihe innerhalb der Klammern, ohne Rücksicht auf das Zeichen, so ist:

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dn} = \frac{d\log u}{dn} = -\frac{2}{2+2n} - \frac{2}{4+2n} - \dots - \frac{2}{2m+2n},$$

so dass:

$$\left(\frac{du}{dn}\right)_{n=0} = -u_{n=0}\, S_m,$$

wenn:

$$S_m = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \quad \dots\dots \quad (3).$$

Somit:

$$f'(0) = \log r\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2^2} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2^2.4^2} - \frac{\varkappa^6 r^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots\right\}$$
$$+ \left\{\frac{\varkappa^2 r^2}{2^2} - \frac{\varkappa^4 r^4}{2^2.4^2} S_2 + \frac{\varkappa^6 r^6}{2^2.4^2.6^2} S_3 - \dots\right\},$$

und das vollständige Integral für $n = 0$ lautet:

$$\psi_0 = (A + B \log r)\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2^2} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2^2.4^2} - \dots\right\}$$
$$+ B\left\{\frac{\varkappa^2 r^2}{2^2} - \frac{\varkappa^4 r^4}{2^2.4^2} S_2 + \frac{\varkappa^6 r^6}{2^2.4^2.6^2} S_3 - \dots\right\} \quad . \; . \; . \quad (4).$$

Für den allgemeinen ganzzahligen Werth von n lässt sich der entsprechende Ausdruck mittelst (15) §. 338 ableiten in folgender Form:

$$\psi_n = (-2\varkappa r)^n \left(\frac{d}{d(\varkappa r)^2}\right)^n \psi_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Die Darstellung mittelst wiederholter Differentiations-Formel (5) kann man direct aus der Differentialgleichung (1) erhalten. Schreiben wir z für $\varkappa r$ und setzen:

$$\psi_n = z^n \varphi_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

so finden wir an Stelle von (1):

$$\frac{d^2 \varphi_n}{d z^2} + \frac{2n+1}{z} \frac{d \varphi_n}{d z} + \varphi_n = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Weiter lässt sich (7) in folgende Form bringen:

$$z^2 \frac{d^2 \varphi_n}{d(z^2)^2} + (n+1)\frac{d\varphi_n}{d.z^2} + \frac{1}{4}\varphi_n = 0 \quad . \; . \quad (8),$$

woraus sofort folgt, dass:

$$\varphi_n = \frac{d}{d.z^2}\varphi_{n-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9);$$

so dass:

$$\varphi_n = \left(\frac{d}{d.z^2}\right)^n \varphi_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10),$$

oder nach (6):

$$\psi_n = z^n \left(\frac{d}{d.z^2}\right)^n \psi_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

welches äquivalent mit (5) ist, da die Constanten von ψ_0 in beiden Gleichungen willkürlich sind.

Die so erhaltenen Reihenausdrücke für ψ_n sind für alle Werthe des Argumentes convergent, sie sind aber praktisch nicht zu gebrauchen, wenn das Argument gross ist. In solchen Fällen müssen wir unsere Zuflucht zu halbconvergenten Reihen nehmen entsprechend der in (10) §. 200.

Gleichung (1) lässt sich in folgende Form bringen:

$$\frac{d^2(z^{1/2}\psi_n)}{dz^2} - \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{z^2}(z^{1/2}\psi_n) + z^{1/2}\psi_n = 0 \quad (12),$$

woraus wir nach §. 323 (4), (12) als allgemeine Lösung von (1) finden:

$$\psi_n = C(i\varkappa r)^{-1/2}e^{-i\varkappa r}\left\{1 - \frac{1^2-4n^2}{1.8i\varkappa r} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)}{1.2(8i\varkappa r)^2} - \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)}{1.2.3.(8i\varkappa r)^3} + \ldots\right\}$$
$$+ D(i\varkappa r)^{-1/2}e^{+i\varkappa r}\left\{1 + \frac{1^2-4n^2}{1.8i\varkappa r} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)}{1.2.(8i\varkappa r)^2} + \frac{(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)}{1.2.3.(8i\varkappa r)^3} + \ldots\right\} \ldots (13).$$

Für ein ganzzahliges n sind diese Reihen unendlich und schliesslich divergent, dieser Umstand beeinträchtigt aber ihre praktische Brauchbarkeit nicht (§§. 200, 302).

Die wichtigste Anwendung des vollständigen Integrales von (1) ist die eine Störung darzustellen, welche von dem Pole aus divergirt — ein Problem, das von Stokes in seiner Arbeit über die Mittheilung von Schwingungen an ein Gas behandelt wurde. Die Bedingung dafür, dass die durch (13) dargestellte Störung ausschliesslich divergent ist, wird einfach durch $D=0$ gegeben, wie sich unmittelbar aus der Einführung des Zeitfactors $e^{i\varkappa at}$ ergiebt unter Annahme, dass r sehr gross ist; die Hauptschwierigkeit der Frage besteht darin, aufzufinden, welche Beziehung zwischen den Coefficienten der aufsteigenden Reihe dieser Bedingung entspricht. Zu diesem Zwecke benutzt

Stokes die Lösung von (1) in der Gestalt eines bestimmten Integrales. Wir werden dasselbe Ziel, vielleicht einfacher, durch Benutzung der Resultate des §. 302 erhalten.

Nach (22), (24) §. 302 ist:

$$-\left(\frac{\pi}{2iz}\right)^{1/2} e^{-iz}\left\{1 = \frac{1^2}{1.8iz} + \frac{1^2.3^2}{1.2.(8iz)^2} - \dots\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\{K(z) + iJ_0(z)\} - \int_0^\infty \frac{e^{-\beta}d\beta}{\sqrt{(\beta^2+z^2)}} \dots (14);$$

somit reducirt sich die Frage auf die Bestimmung der Form des Gliedes rechter Hand von (14) für den Fall, wo z klein ist. Nach (5) §. 302 und (5) §. 200 haben wir:

$$\frac{1}{2}\pi\{K(z) + iJ_0(z)\} = z + \frac{1}{2}i\pi + \text{höhere Glieder in } z \dots (15),$$

so dass Alles, was übrig bleibt, das ist: die Form des bestimmten Integrales für ein kleines z zu finden.

Setzen wir $\sqrt{(\beta^2 + z^2)} = y - \beta$, so haben wir:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}d\beta}{\sqrt{(\beta^2+z^2)}} = \int_z^\infty e^{-\frac{y^2-z^2}{2y}}\frac{dy}{y} = \int_z^\infty e^{1/2 z^2 y^{-1}} e^{-1/2 y}\frac{dy}{y}.$$

Wenn z klein ist, so ist $z^2(2y)^{-1}$ in dem ganzen Bereiche der Integration ebenfalls klein; somit dürfen wir schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta}d\beta}{\sqrt{(\beta^2+z^2)}} = \int_z^\infty \left\{1 + \frac{z^2}{2y} + \frac{1}{2}\frac{z^4}{4y^2} + \dots\right\}\frac{e^{-1/2 y}}{y}\,dy.$$

Das erste Integral rechter Hand wird:

$$\int_z^\infty \frac{e^{-1/2 y}}{y}dy = \int_{1/2 z}^\infty \frac{e^{-v}\,dv}{v} = -\gamma - \log\left(\frac{1}{2}z\right) + \frac{1}{2}z + . \;(16)^{1)},$$

worin γ **Euler's** Constante (0,57772...) ist. Die anderen Integrale steuern, wovon wir uns durch theilweise Integration leicht überzeugen können, zu den Hauptgliedern nichts bei. Somit haben wir für ein sehr kleines z:

---

1) **De Morgan's** Differential and Integral Calculus, p. 653.

$$-\left(\frac{\pi}{2iz}\right)^{1/2} e^{-iz}\left\{1-\frac{1^2}{1.8iz}+\frac{1^2.3^2}{1.2.(8iz)^2}-\dots\right\}$$

$$= \gamma + log\left(\frac{1}{2}z\right) + \frac{1}{2}i\pi + \dots \quad (17).$$

Ersetzen wir wieder z durch $\varkappa r$ und vergleichen diese Gleichung mit der Form, welche (4) für ein kleines r annimmt, so sehen wir, dass wir um die Reihen identisch zu machen, nehmen müssen:

$$A = \gamma + log\frac{1}{2} + log\,\varkappa + \frac{1}{2}i\pi, \qquad B = 1;$$

so dass eine Reihe von aus dem Pole divergirender Wellen, deren Ausdruck in absteigender Reihe lautet:

$$\psi_0 = -\left(\frac{\pi}{2i\varkappa r}\right)^{1/2} e^{-i\varkappa r}\left\{1-\frac{1^2}{1.8i\varkappa r} + \frac{1^2.3^2}{1.2.(8i\varkappa r)^2}-\dots\right\} \quad \dots \quad (18),$$

ebenso durch die folgende aufsteigende Reihe dargestellt wird:

$$\psi_0 = \left(\gamma + log\frac{i\varkappa r}{2}\right)\left\{1-\frac{\varkappa^2 r^2}{2^2}+\frac{\varkappa^4 r^4}{2^2.4^2}-\dots\right\} + \frac{\varkappa^2 r^2}{2^2}S_1 - \frac{\varkappa^4 r^4}{2^2.4^2}S_2 + \frac{\varkappa^6 r^6}{2^2.4^2.6^2}S_3 - \dots \quad (19).$$

Bei der Anwendung der Differentiationsformel (11) auf die absteigende Reihe bleiben offenbar die Theile, welche $e^{-i\varkappa r}$ und $e^{+i\varkappa r}$ als Factor enthalten, von einander verschieden und das vollständige Integral für den allgemeinen Werth von n, welches der Bedingung unterliegt, dass der $e^{+i\varkappa r}$ enthaltende Theil nicht auftritt, wird durch Differentiation aus dem vollständigen Integral für $n = 0$, welches derselben Bedingung unterliegt, erhalten. Somit ist, da nach (5): $\psi_1 = \frac{d\psi_0}{dr}$,

$$\psi_1 = \left(\frac{\pi i}{2\varkappa r}\right)^{1/2} e^{-i\varkappa r}\left\{1-\frac{-1.3}{1.8i\varkappa r}+\frac{-1.1.3.5}{1.2.(8i\varkappa r)^2} - \frac{-1.1.3^2.5.7}{1.2.3.(8i\varkappa r)^3}+\dots\right\} \quad \dots \quad (20),$$

oder nach aufsteigender Reihe:

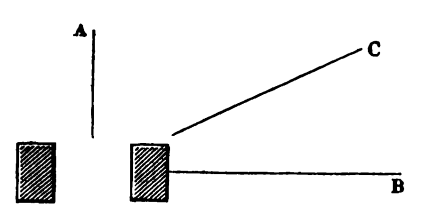
$$\psi_1 = \frac{1}{\varkappa r}\left\{1 - \frac{\varkappa^2 r^2}{2^2} + \frac{\varkappa^4 r^4}{2^2 . 4^2} - \ldots\right\}$$
$$-\left(\gamma + \log\frac{i\varkappa r}{2}\right)\left\{\frac{\varkappa r}{2} - \frac{\varkappa^3 r^3}{2^2 . 4} + \frac{\varkappa^5 r^5}{2^2 . 4^2 . 6} - \ldots\right\}$$
$$+ \frac{\varkappa r}{2} S_1 - \frac{\varkappa^3 r^3}{2^2 . 4} S_2 + \frac{\varkappa^5 r^5}{2^2 . 4^2 . 6} S_3 - \ldots \quad (21).$$

Diese Ausdrücke wurden von Prof. Stokes darauf angewandt, zu zeigen, wie schwach die Schwingungen einer Saite (die dem Gliede von der Ordnung Eins entsprechen) dem umgebenden Gase mitgetheilt werden. Zu diesem Zwecke machte er einen Vergleich zwischen dem wirklich vorhandenen Schall und dem, welcher nach derselben Richtung ausgesandt werden würde, wenn die seitliche Bewegung des Gases in der Nachbarschaft der Saite verhindert worden wäre. Bei einer Pianinosaite, welche etwa das mittlere *C* giebt, ist der Radius des Drahtes ungefähr gleich 0,5 mm, λ ist etwa 635 mm; es ergiebt sich, dass der Schall nahezu 40 000mal schwächer ist als er gewesen wäre, wenn die Bewegung der Lufttheilchen in Ebenen vor sich ginge, die durch die Axe der Saite hindurchgehen. Dieses zeigt die fundamentale Wichtigkeit der Schallbretter bei Saiteninstrumenten. Obschon die Schwingungsamplitude der Theilchen des Schallbrettes ausserordentlich klein im Vergleich mit der der Partikelchen der Saite ist, so ist das Schallbrett doch, weil es der Luft eine grosse Oberfläche bietet, fähig laute Schallschwingungen zu erregen, während, wenn die Saite in einer absolut starren Weise unterstützt würde, die Schwingungen, welche dieselbe direct in der Luft erregen könnte, so klein sein würden, dass sie zum grössten Theil oder ganz unhörbar wären."

„Die Verstärkung des Schalles, welche durch ein Hindern der seitlichen Bewegung hervorgerufen wird, lässt sich hübsch durch einen sehr einfachen Versuch darstellen. Man nehme eine Stimmgabel, halte diese nach ihrer Erregung in den Fingern und bringe dann ein Blatt Papier oder die Klinge eines Brodmessers mit der Schneide parallel der Axe der

Gabel an letztere so nahe heran, wie es zweckmässig geschehen kann ohne die Gabel zu berühren. Fällt die Ebene des Hemmnisses mit einer der Symmetrieebenen der Gabel zusammen, wie dieselben in dem Querschnitte in Fig. 64 durch *A* oder *B*

Fig. 64.



dargestellt werden, so erfolgt keine Wirkung; wird sie dagegen in eine zwischen diesen liegende Lage gebracht, etwa wie in *C*, so wird der Schall viel stärker" [1]).

342. Der reelle Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential von symmetrischen Wellen, welche nach zwei Richtungen divergiren, wird aus (18) §. 341 nach Einführung des Zeitfaktors $e^{i\varkappa a t}$ durch Wegwerfung des imaginären Theils erhalten; er ist:

$$\psi_0 = -\left(\frac{\pi}{2\varkappa r}\right)^{1/2} \cos\varkappa\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right)\left\{1 - \frac{1^2 . 3^2}{1 . 2 . (8\varkappa r)^2} + \dots\right\}$$
$$+ \left(\frac{\pi}{2\varkappa r}\right)^{1/2} \sin\varkappa\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right)\left\{\frac{1^2}{1 . 8\varkappa r}\right.$$
$$\left. - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{1 . 2 . 3 . (8\varkappa r)^3} + \dots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin, wie gewöhnlich, zwei willkürliche Constanten eingeführt werden können, eine als Factor des ganzen Ausdruckes und die andere als additiver Zuwachs zu der Zeit.

Das Problem einer linearen Quelle von gleichförmiger Intensität lässt sich gleichfalls nach der allgemeinen auf drei Dimensionen anwendbaren Methode behandeln. So können wir nach (3) §. 277 setzen, wenn ϱ den Abstand irgend eines Ele-

---

[1]) Phil. Trans. 1868.

mentes dx von O, dem Punkte, in welchem das Potential berechnet werden soll, ist und r der kleinste Werth von ϱ, so dass $\varrho^2 = r^2 + x^2$:

$$\varphi = 2\int_0^\infty \frac{e^{-i\varkappa\varrho}\,dx}{\varrho} = 2\int_r^\infty \frac{e^{-i\varkappa\varrho}\,d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2 - r^2)}} \quad \ldots (2),$$

welche Gleichung dieselbe Form wie (1) haben muss. Nehmen wir $y = \varrho - r$, so dürfen wir an Stelle von (2) schreiben:

$$\varphi = 2\int_0^\infty \frac{e^{-i\varkappa r}\,e^{-i\varkappa y}\,dy}{\sqrt{y}.\sqrt{(2r + y)}} \quad \ldots\ldots (3),$$

woraus die verschiedenen Ausdrücke, wie in (14) §. 341, folgen. Für ein grosses $\varkappa r$ lässt sich ein angenäherter Werth des Integrales durch Vernachlässigung der Variation von $\sqrt{(2r+y)}$ erhalten, da wir wegen des rapiden durch den Factor $e^{-i\varkappa y}$ verursachten Wechsels des Zeichens nur auf kleine Werthe von y zu achten brauchen. Nun ist:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad \ldots (4)$$

so dass:

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\varkappa r}\right)}\,e^{-i\varkappa r}\,(1 - i) = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\varkappa r}\right)}\,e^{-i\varkappa(r + \frac{1}{8}\lambda)} \ldots (5).$$

Führen wir den Faktor $e^{i\varkappa at}$ ein und werfen den imaginären Theil des Ausdruckes fort, so haben wir schliesslich:

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\varkappa r}\right)}\cos\varkappa\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right) \quad \ldots (6),$$

als Werth des Geschwindigkeitspotentiales in einer grossen Entfernung. Ein ähnliches Argument lässt sich anwenden um zu zeigen, dass (1) auch der Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential auf der einen Seite einer unendlichen Ebene ist (§. 278), welches von der gleichförmigen Normalbewegung eines unendlich kleinen von parallelen Linien begrenzten Streifens herrührt.

Auf gleiche Weise können wir das Glied erster Ordnung (20) §. 341 als Ausdruck für dasjenige Geschwindigkeits-

potential ansehen, welches von doppelten, gleichmässig auf einer unendlichen geraden Linie vertheilten Quellen herrührt.

Aus dem Gesichtspunkte dieses Paragraphen erkennen wir die Bedeutung der Verzögerung um $\frac{1}{8}\lambda$, welche in (1) und in den Resultaten (16), (17) des folgenden Paragraphen auftritt. Bei der gewöhnlichen Integration für Flächenvertheilungen mittelst der Huyghens'schen Zonen (§. 283) ist die ganze Wirkung die Hälfte von der der ersten Zonen, die Phase der Wirkung der ersten Zone liegt in der Mitte zwischen den Phasen, welche von den äussersten Theilen herrühren, d. i. um $\frac{1}{4}\lambda$ hinter der von dem Mittelpunkte herrührenden Phase. In dem vorliegenden Falle ist die Verzögerung der Resultante dem centralen Elemente gegenüber geringer wegen des Ueberwiegens der centralen Theile.

343. Zur Illustration der Formeln des §. 341 können wir das Problem der Störung ebener Schallwellen durch ein cylindrisches Hinderniss nehmen, dessen Radius klein im Vergleich zu der Länge der Wellen und dessen Axe parallel zu der Ebene der letzteren ist. (Vergl. §. 335.)

Die ebenen Wellen mögen dargestellt werden durch:

$$\varphi = e^{i\varkappa(at+x)} = e^{i\varkappa at} \,.\, e^{i\varkappa r \cos\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die allgemeine Entwickelung von φ nach der Fourier'schen Reihe lässt sich leicht ausführen, wobei die Coefficienten der verschiedenen Glieder, wie vorweg geschlossen werden kann, einfach die Bessel'schen Functionen der entsprechenden Ordnung sind; wenn wir uns aber auf den Fall beschränken, wo c, der Radius des Cylinders, klein ist, dann wollen wir sofort nach Potenzen von r entwickeln.

So haben wir für $r = c$, wenn $e^{i\varkappa at}$ vernachlässigt wird:

$$\varphi = 1 - \frac{1}{4}\varkappa^2 c^2 + i\varkappa c.\cos\vartheta + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{2}\varkappa^2 c + i\varkappa.\cos\vartheta + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Der Betrag und selbst das Gesetz der Störung hängt von dem Charakter des Hindernisses ab. Wir wollen damit beginnen, anzunehmen, dass die Materie des Cylinders ein Gas von der Dichtigkeit σ' und Zusammendrückbarkeit m' ist; die Lösung des Problemes für ein starres Hinderniss kann schliesslich durch zweckmässige Annahmen über σ' und m' abgeleitet werden. Ist $\varkappa'$ der innere Werth von $\varkappa$, so haben wir nach der Bedingung, dass die Axe des Cylinders keine Quelle ist, innerhalb des Cylinders (§. 339):

$$\psi = A_0\left\{1 - \frac{\varkappa'^2 r^2}{2^2} + \frac{\varkappa'^4 r^4}{2^2 . 4^2} - \cdots\right\}$$
$$+ A_1 r\left\{1 - \frac{\varkappa'^2 r^2}{2.4} + \frac{\varkappa'^4 r^4}{2.4^2.6} - \cdots\right\} \cos\vartheta;$$

so dass für $r = 0$:

$$\psi \text{ (innerhalb)} = A_0\left(1 - \frac{1}{4}\varkappa'^2 c^2\right)$$
$$+ A_1 c\left(1 - \frac{1}{8}\varkappa'^2 c^2\right).\cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

$$\frac{d\psi}{dr} \text{ (innerhalb)} = -\frac{1}{2} A_0 \varkappa'^2 c$$
$$+ A_1\left(1 - \frac{3}{8}\varkappa'^2 c^2\right)\cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Ausserhalb des Cylinders haben wir für $r = c$ nach (19), (21) §. 341:

$$\psi = B_0\left(\gamma + \log\frac{i\varkappa c}{2}\right) + \frac{B_1 \cos\vartheta}{\varkappa c} \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{B_0}{c} - \frac{B_1\cos\vartheta}{\varkappa c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die an der Trennungsfläche zu erfüllenden Bedingungen lauten somit:

$$-A_0\varkappa'^2 c^2 = -\varkappa^2 c^2 + 2B_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma} A_0\left(1 - \frac{1}{4}\varkappa'^2 c^2\right) = 1 - \frac{1}{4}\varkappa^2 c^2 + B_0\left(\gamma + \log\frac{i\varkappa c}{2}\right) \, . . (9),$$

$$A_1\left(1-\frac{3\varkappa'^2c^2}{8}\right)=i\varkappa-\frac{B_1}{\varkappa c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}A_1 c\left(1-\frac{\varkappa'^2c^2}{8}\right)=i\varkappa c+\frac{B_1}{\varkappa c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

woraus wir durch Elimination von A_0, A_1 annähernd erhalten:

$$B_0=\frac{1}{2}\varkappa^2c^2\left(1-\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}\cdot\frac{\sigma}{\sigma'}\right)=\frac{1}{2}\varkappa^2c^2\frac{m'-m}{m'} \quad . . (12),$$

$$B_1=i\varkappa^2c^2\frac{\sigma'-\sigma}{\sigma'+\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

So haben wir in von dem Cylinder entfernten Punkten nach (18) und (20) §. 341:

$$\psi=-B_0\left(\frac{\pi}{2i\varkappa r}\right)^{1/2}e^{-i\varkappa r}+B_1\left(\frac{\pi i}{2\varkappa r}\right)^{1/2}e^{-i\varkappa r}\cdot\cos\vartheta$$

$$=-\varkappa^2c^2e^{-i\varkappa r}\left(\frac{\pi}{2i\varkappa r}\right)^{1/2}\left\{\frac{m'-m}{2m'}+\frac{\sigma'-\sigma}{\sigma'+\sigma}\cos\vartheta\right\}$$

$$=-\frac{2\pi\,.\,\pi c^2}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}e^{-i(\varkappa r+\frac{1}{4}\pi)}\left\{\frac{m'-m}{2m'}+\frac{\sigma'-\sigma}{\sigma'+\sigma}\cos\vartheta\right\} \ldots (14).$$

Demnach ist entsprechend der primären Welle:

$$\varphi=\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at+x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

die zerstreute Welle annähernd:

$$\psi=-\frac{2\pi\,.\,\pi c^2}{r^{1/2}\lambda^{3/2}}\left\{\frac{m'-m}{2m'}\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma'-\sigma}{\sigma'+\sigma}\cos\vartheta\right\}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(at-r-\frac{1}{8}\lambda\right) \quad . . . (16).$$

Die Thatsache, dass ψ sich umgekehrt wie $\lambda^{-3/2}$ ändert, hätte durch die Methode der Dimensionen vorweggeschlossen werden können, wie in dem entsprechenden Probleme der Kugel (§. 335). Wie in diesem Falle hängt der symmetrische Theil der divergirenden Welle von der Aenderung der Compressibilität ab, und würde bei der Anwendung auf ein wirkliches Gas verschwinden, das Glied erster Ordnung hängt ebenso von der Aenderung der Dichte ab.

Nehmen wir an, dass σ' und m' unendlich werden, und zwar in einer solchen Weise, dass ihr Verhältniss endlich bleibt, so erhalten wir die Lösung, welche einem starren und unbeweglichen Hindernisse entspricht:

$$\psi = -\frac{2\pi . \pi c^2}{r^{1/2} \lambda^{3/2}} \left(\frac{1}{2} + \cos\vartheta\right) \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(at - r - \frac{1}{8}\lambda\right) \; .. (17).$$

Die Rechnungsmethode dieses Paragraphen lässt sich auf das folgende mathematisch analoge Problem anwenden: die Wirkung eines cylindrischen Hemmnisses auf ebene Wellen von transversaler Schwingung in einem elastischen Medium zu finden, wobei die Richtung der Schwingung parallel der Axe des Cylinders geht. Sind die Dichten σ und σ', die Starrheiten resp. n und n' und bezeichnet γ die transversale Verschiebung, so lauten die Grenzbedingungen:

$$\gamma \text{ (innerhalb)} = \gamma \text{ (ausserhalb)},$$

$$n' \frac{d\gamma}{dr} \text{ (innerhalb)} = n \frac{d\gamma}{dr} \text{ (ausserhalb)}.$$

Das Resultat ist, dass entsprechend den primären Wellen:

$$\gamma = \cos\frac{2\pi}{\lambda} bt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18),$$

die Störung lautet:

$$\gamma = \frac{2\pi . \pi c^2}{\lambda^{3/2} r^{1/2}} \left\{\frac{\sigma' - \sigma}{2\sigma} - \frac{n' - n}{n' + n} \cos\vartheta\right\} \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(bt - r - \frac{1}{8}\lambda\right) \; . \; . \; (19).$$

Wegen einer Anwendung auf die Theorie des Lichtes wird der Leser auf eine Arbeit des Autors: „On the manufacture and theory of diffraction gratings“ [1]) verwiesen.

Die ausserordentliche Kleinheit des Hindernisses, welches dünne Drähte oder Fasern dem Vorwärtsschreiten des Schalles entgegensetzen, wird in einigen von Tyndall's Versuchen in schlagender Weise illustrirt. Ein Stück von steifem Filz,

---

[1]) Phil. Mag. Vol. XLVII. 1874.

dessen Dicke ein halber Zoll ist, lässt mehr Schall hindurch, als ein angefeuchtetes Taschentuch, welches sich in Folge des Verschlusses seiner Poren eher wie eine dünne Lamelle verhält. Aus demselben Grunde beeinflussen Nebel und selbst Regen und Schnee nur wenig die freie Fortpflanzung von Schallen von mässiger Wellenlänge. Bei einem Zischen, oder anderen sehr hohen Schallen, tritt die Einwirkung vielleicht hervor.

Capitel XIX.

Reibung eines Fluidum. Princip der dynamischen Aehnlichkeit.

344. Die Gleichungen des Capitel XI und die Folgerungen, welche wir aus denselben gezogen haben, sind gegründet auf die Annahme (§. 236), dass die Wechselwirkung zwischen je zwei Fluidumtheilchen, die durch eine imaginäre Fläche getrennt werden, normal zu dieser Fläche ist. Wirkliche Fluida erreichen indessen dieses Ideal nicht; bei vielen Erscheinungen spielt der Mangel an vollkommener Beweglichkeit, gewöhnlich Zähigkeit oder Flüssigkeitsreibung genannt, eine wichtige und selbst eine überwiegende Rolle. Es wird daher angebracht sein zu untersuchen, ob die Gesetze der Luftschwingungen durch die Zähigkeit der Luft in merklicher Weise beeinflusst werden und, wenn so, in welcher Weise.

Um die Natur der Zähigkeit klar zu verstehen, wollen wir uns vorstellen, dass ein Fluidum in einer solchen Weise in parallele Schichten getheilt ist, dass eine Aenderung der Geschwindigkeit beim Uebergang von der einen Schicht in die andere eintritt, während sich jede Schicht in ihrer eigenen Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Die einfachste Annahme, die wir machen können, ist die, dass die Geschwindigkeit aller Schichten nach derselben Richtung hin gerichtet ist, aber gleichmässig in ihrer Grösse zunimmt, wenn wir längs einer Linie senkrecht zu den Schichtungsebenen

vorschreiten. Unter diesen Umständen wird eine tangentiale Kraft zwischen benachbarten Schichten ins Spiel gerufen in der Richtung der relativen Bewegung und von einer Grösse, welche proportional dem Verhältnisse ist, in dem die Geschwindigkeit sich ändert, sowie einem gewöhnlich mit dem Buchstaben μ bezeichneten Coefficienten der Zähigkeit. Sind die Schichten parallel zu xy, und ist die Richtung ihrer Bewegung parallel y, so wird die tangentiale Kraft, bezogen (gleich einem Drucke) auf die Flächeneinheit:

$$\mu \frac{dv}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Die Dimensionen von μ sind $[ML^{-1} T^{-1}]$.

Die Untersuchung des Ursprunges der tangentialen Kraft gehört in die Molecular-Physik. Sie wurde von Maxwell in Uebereinstimmung mit der kinetischen Gastheorie erklärt als Resultat des Austausches der Molecüle zwischen den Schichten, welcher Austausch eine Diffusion von Bewegungsmenge hervorruft. Sowohl durch die Theorie wie durch den Versuch hat sich der bemerkenswerthe Schluss ergeben, dass die Kraft innerhalb weiter Grenzen von der Dichte des Gases unabhängig ist. Für Luft von ϑ^0 Celsius fand Maxwell[1]):

$$\mu = 0{,}0001878\,(1 + 0{,}00366\,\vartheta) \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

wobei Centimeter, Gramme und Secunde die Einheiten sind.

345. Die Untersuchung über die Gleichungen der Bewegung eines Fluidum, in denen den Zähigkeitskräften Rechnung getragen wird, kann kaum als zu dem Gegenstande dieses Werkes gehörig angesehen werden; es mag aber für manche Leser von Nutzen sein, ihre enge Verbindung mit der allgemeiner bekannten Theorie der Elasticität fester Körper auseinanderzusetzen.

Die potentielle Energie der Volumeneinheit einer gleichmässig deformirten, isotropen Materie kann ausgedrückt werden als[2]):

[1]) On the Viscosity or Internal Friction of Air and other Gases. Phil. Trans. 1866.

[2]) Thomson und Tait, Theoretische Physik Appendix C.

$$V = \frac{1}{2} m \delta^2 + \frac{1}{2} n (e^2 + f^2 + g^2 - 2fg - 2ge - 2ef$$

$$+ a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{2} \varkappa \delta^2 + \frac{1}{2} n \Big(2e^2 + 2f^2$$

$$+ 2g^2 - \frac{2}{3}\delta^2 + a^2 + b^2 + c^2 \Big) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

worin δ ($= e + f + g$) die Dilatation bedeutet, e, f, g, a, b, c die sehs Componenten der Deformation, welche mit den thatsächlichen Verschiebungen α, β, γ durch die Gleichungen:

$$e = \frac{d\alpha}{dx}, \qquad f = \frac{d\beta}{dy}, \qquad g = \frac{d\gamma}{dz} \quad \ldots \quad (2),$$

$$a = \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}, \quad b = \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}, \quad c = \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \ldots (3)$$

verbunden werden; $m, n, \varkappa$ sind Constanten der Elasticität, verbunden durch folgende Gleichung:

$$\varkappa = m - \frac{1}{3} n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4);$$

n misst unter ihnen die Starrheit, d. h. den Widerstand gegen Schiebung, und $\varkappa$ misst den Widerstand gegen eine Aenderung des Volumens. Die Componenten des Zuges P, Q, R, S, T, U, welche resp. e, f, g, a, b, c entsprechen, werden aus V durch einfache Differentiation nach diesen Grössen gefunden; so ist:

$$P = \varkappa \delta + 2n \left(e - \frac{1}{3} \delta \right) \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$$S = n a \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Sind X, Y, Z die Componenten der auf die Volumeneinheit reducirten angreifenden Kräfte, so haben die Gleichgewichtsgleichungen folgende Form:

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dU}{dy} + \frac{dT}{dz} + X = 0 \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

woraus die Bewegungsgleichungen sich sofort mittelst des D'Alembert'schen Principes erhalten lassen. In Werthen der Verschiebungen α, β, γ werden diese Gleichungen:

$$\varkappa \frac{d\delta}{dx} + \frac{1}{3} n \frac{d\delta}{dx} + n \nabla^2 \alpha + X = 0 \text{ etc.} \quad \ldots \quad (8),$$

worin:

$$\delta = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

In der gewöhnlichen Theorie der Reibung eines Fluidums werden keine Restitutionskräfte mit behandelt, andererseits haben wir aber dort Zähigkeitskräfte zu betrachten, deren Beziehung zu den Geschwindigkeiten (u, v, w) der Elemente des Fluidums genau denselben Charakter hat, wie die der Restitutionskräfte zu den Verschiebungen (α, β, γ) eines isotropen Körpers. Somit lautet, wenn δ' die Geschwindigkeit der Dilatation ist, so dass:

$$\delta' = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

die Kraft parallel zu x, welche von der Zähigkeit herrührt, wie in (8):

$$\varkappa \frac{d\delta'}{dx} + \frac{1}{3} n \frac{d\delta'}{dx} + n \nabla^2 u. \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

So weit sind $\varkappa$ und n willkürliche Constanten; es sind aber von Professor Stokes sehr zwingende Gründe dafür angeführt, dass kein Grund vorliegt, weshalb eine Bewegung von nach allen Richtungen gleichförmiger Dilatation das Entstehen von Zähigkeitskräften verursachen oder bewirken sollte, dass der Druck von demjenigen statischen Drucke abweicht, welcher der vorhandenen Dichte entspricht. In Uebereinstimmung mit diesem Argumente sind wir berechtigt, $\varkappa = 0$ zu setzen; n fällt dann, wie aus (6) hervorgeht, mit der vorher mit μ bezeichneten Grösse zusammen. Die Reibungsglieder lauten demnach:

$$\mu \left\{ \nabla^2 u + \frac{1}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \right\}, \text{ etc.};$$

die Bewegungsgleichungen (§. 237) nehmen dann die folgende Form an:

$$\varrho \left(\frac{Du}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} - \mu \nabla^2 u$$
$$- \frac{1}{3} \mu \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0 \quad \ldots \quad (12),$$

oder, wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind und das Quadrat der Bewegung vernachlässigt wird:

$$\varrho_0 \frac{du}{dt} + \frac{dp}{dx} - \mu \nabla^2 u - \frac{1}{3}\mu \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0 \quad \ldots \quad (13)$$

Es mag bemerkt werden, dass die hier betrachteten Zerstreuungskräfte einer Zerstreuungsfunction entsprechen, deren Form mit Bezug auf u, v, w dieselbe ist, wie in der Theorie der isotropen festen Körper die von V mit Bezug auf α, β, γ. Setzen wir daher $\varkappa = 0$, so haben wir aus (1):

$$F = \mu \int\int\int \left[2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + 2\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz \quad \ldots \quad (14),$$

in Uebereinstimmung mit der Berechnung von Prof. Stokes[1]). Die Theorie der Reibung für den Fall eines compressiblen Fluidums wurde zuerst von Poisson[2]) gegeben.

346. Wir wollen jetzt die Differentialgleichungen auf die Untersuchung von ebenen Schallwellen anwenden. Nehmen wir an, dass v und w gleich Null, und dass u, p etc. nur Functionen von x sind, so erhalten wir aus (13) §. 345:

$$\varrho_0 \frac{du}{dt} + \frac{dp}{dx} - \frac{4\mu}{3}\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \ldots \quad (1).$$

Die Continuitätsgleichung (3) lautet in diesem Falle:

$$\frac{ds}{dt} + \frac{du}{dx} = 0 \quad \ldots \quad (2),$$

und die Beziehung zwischen dem veränderlichen Theile δp des Druckes und der Verdichtung s ist wie gewöhnlich (§. 244):

$$\delta p = a^2 \varrho_0 s \quad \ldots \quad (3).$$

Somit erhalten wir durch Elimination von δp und s aus (1), (2) und (3):

[1]) Cambridge Transactions, 1851. §. 49.

[2]) Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XIII, cah. 20, p. 139.

$$\frac{d^2u}{dt^2} - a^2\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{4\mu}{3\varrho_0}\frac{d^3u}{dx^2dt} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (4),$$

welches die von Stokes gegebene Gleichung ist[1]).

Wir wollen nun untersuchen, wie ein Zug von harmonischen Wellen von der Wellenlänge λ, welche in dem Ursprunge ($x = 0$) aufrecht erhalten werden, mit wachsendem x allmälig vergeht. Nehmen wir an, dass u sich wie e^{int} ändert, so finden wir wie in §. 148:

$$y = Ae^{-\alpha x}\cos(nt - \beta x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

worin:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{n^2a^2}{a^4 + \frac{16\mu^2n^2}{9\varrho_0^2}}, \quad 2\alpha\beta = \frac{\frac{4\mu n^3}{3\varrho_0}}{a^4 + \frac{16\mu^2n^2}{9\varrho_0^2}} \quad . \; . \; . \quad (6).$$

Bei der Anwendung auf Luft von gewöhnlichem Drucke kann μ als eine sehr kleine Grösse angesehen und ihr Quadrat vernachlässigt werden. Dann ist:

$$\beta = \frac{n}{a}, \quad \alpha = \frac{2\mu n^2}{3\varrho_0 a^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Es geht hieraus hervor, dass die Geschwindigkeit des Schalles bis zu diesem Grade von Annäherung durch Reibung des Fluidums nicht beeinflusst wird. Ersetzen wir n durch $2\pi a\lambda^{-1}$, so wird der Ausdruck für den Schwächungscoefficienten:

$$\alpha = \frac{8\pi^2\mu}{3\lambda^2\varrho_0 a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8),$$

welcher zeigt, dass der Einfluss der Zähigkeit den grössten Werth hat für die Wellen von kurzer Wellenlänge. Die Amplitude wird in dem Verhältnisse $e : 1$ vermindert, wenn $x = \alpha^{-1}$. In C. G. S. Maass können wir nehmen:

$$\varrho_0 = 0{,}0013, \quad \mu = 0{,}00019, \quad a = 33200;$$

worin:

$$x = 8800\,\lambda^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Daher wird die Amplitude der Wellen von einem Centimeter Wellenlänge nach Durcheilung einer Entfernung von 88 Metern

---

1) Cambridge Transactions, 1845.

in dem Verhältnisse $e : 1$ vermindert. Eine Wellenlänge von 10 Centimetern würde nahezu g'''' entsprechen; für diesen Fall ist $x = 8800$ Metern. Es geht hieraus hervor, dass bei Atmosphärendruck der Einfluss der Reibung wahrscheinlich für gewöhnliche Beobachtung nicht merkbar ist mit Ausnahme in der Nähe der oberen Grenze der musikalischen Scala. Das Weicherwerden von Schallen durch die Entfernung, wie dasselbe in bergigen Gegenden beobachtet wird, ist vielleicht der Reibung zuzuschreiben, durch deren Einwirkung die höheren und unangenehmeren Componenten allmälig eliminirt werden. Es muss oft bemerkt worden sein, dass der Schall *s* nur spärlich, wenn überhaupt, durch ein Echo zurückkommt; ich habe gefunden[1]), dass in einer Entfernung von 200 Meter ein kräftiges Zischen seinen Charakter verliert, selbst wenn keine Reflection vorhanden ist. Wahrscheinlich rührt diese Wirkung auch von Zähigkeit her.

In sehr verdünnter Luft wächst der Werth von α, wie derselbe in (8) gegeben ist, sehr, während μ constant bleibt. Dann können selbst Schalle von tiefer Tonhöhe innerhalb mässiger Entfernungen beeinflusst werden.

Aus den Beobachtungen von Colladon im Genfer See würde hervorgehen, dass tiefe Schalle im Wasser rascher gedämpft werden wie hohe Schalle. In einer mässigen Entfernung von der unter Wasser angeschlagenen Glocke fand er den Schall kurz und scharf, ohne musikalischen Charakter.

347. Die Wirkung der Zähigkeit auf die Modificirung der Bewegung von Luft, die mit schwingenden festen Körpern in Berührung steht, wird am besten überschaut aus der von Stokes gegebenen Lösung des Problemes für einen sehr einfachen Fall. Wir wollen annehmen, dass eine unendliche Ebene yz harmonische Schwingungen in einer ihr selbst parallelen Richtung (y) macht. Da die Bewegung in parallelen Schichten erfolgt, so verschwinden u und w, und die veränderlichen Grössen sind Functionen von x allein. Die erste der

[1]) Acoustical Observations, Phil. Mag., June 1877.

Gleichungen (13) §. 245 zeigt, dass der Druck constant ist; die entsprechende Gleichung in v nimmt folgende Form an:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{\varrho} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \text{(1)},$$

ähnlich der Gleichung für die lineare Leitung der Wärme. Nehmen wir an, dass v proportional mit e^{int} ist, so lautet die resultirende Gleichung in x:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = i \frac{n \varrho}{\mu} v \quad \text{(2)},$$

und ihre allgemeine Lösung:

$$v = A e^{-\gamma x} + B e^{+\gamma x} \quad \text{(3)},$$

woraus:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n \varrho}{2 \mu}\right)} (1 \pm i) \quad \text{(4)}.$$

Liegt das Gas auf der positiven Seite der schwingenden Ebene, so verschwindet die Bewegung für $x = +\infty$. Daher $B = 0$, und der Werth von v wird nach Wegwerfung des imaginären Theiles:

$$v = A e^{-\sqrt{\left(\frac{n \varrho}{2 \mu}\right)} x} \cos \left\{ nt - \sqrt{\left(\frac{n \varrho}{2 \mu}\right)} x \right\} \quad \text{(5)},$$

entsprechend der Bewegung:

$$V = A \cos nt \quad \text{(6)}$$

bei $x = 0$. Man nimmt gewöhnlich an, dass die Geschwindigkeit des mit der Ebene in Berührung stehenden Fluidums dieselbe ist, wie die der Ebene selbst, und zwar aus dem offenbar hinreichenden Grunde, dass das Gegentheil hiervon eine sehr viel geringere äussere Reibung des Fluidums gegen den festen Körper, als die innere Reibung des Gases in sich ist, bedeuten würde. Unter dieser Annahme drückt (5) die Bewegung des Fluidums auf der positiven Seite aus, welche von einer durch (6) gegebenen Bewegung der Ebene herrührt.

Die auf die Ebene wirkende tangentiale Kraft auf der Flächeneinheit ist:

$$\mu \frac{dv}{dx}_{(x=0)},$$

oder:

$$\mu \sqrt{\left(\frac{n\varrho}{2\mu}\right)} \{- \cos nt + \sin nt\}$$

$$= - \sqrt{\left(\frac{1}{2} n \varrho \mu\right)} \left(V + \frac{1}{n} \frac{dV}{dt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wenn $A = 1$. Das erste Glied stellt eine Zerstreuungskraft dar, welche die Bewegung zu hemmen sucht; das zweite Glied stellt eine Kraft vor, welche einem Zuwachse in der Trägheit des schwingenden Körpers äquivalent ist. Die Grösse beider Kräfte hängt von der Schwingungszahl ab.

Wir wollen dieses Resultat darauf anwenden, annähernd die Schallgeschwindigkeit in so engen Röhren zu berechnen, dass die Zähigkeit der Luft einen merklichen Einfluss ausübt. Wie in §. 265 möge X den gesammten Transport von Fluidum durch den Querschnitt der Röhre in dem Punkte x darstellen. Die von hydrostatischem Druck herrührende Kraft, welche auf die Schicht zwischen x und $x + \delta x$ wirkt, ist wie gewöhnlich:

$$- S \frac{dp}{dx} \delta x = a^2 \varrho \delta x \frac{d^2 X}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die von der Zähigkeit herrührende Kraft lässt sich aus der Untersuchung einer schwingenden Platte folgern, vorausgesetzt, dass die Dicke der an den Wänden der Röhre anhängenden Luftschicht klein im Vergleich zum Durchmesser ist. So lautet, wenn P der Umfang der Röhre und V die Geschwindigkeit des Stromes in von den Wänden der Röhre abstehenden Punkten ist, die tangentiale Kraft auf die Schicht, deren Volumen $S \delta x$ ist, nach (7)

$$- P \delta x \sqrt{\left(\frac{1}{2} n \varrho \mu\right)} \left(V + \frac{1}{n} \frac{dV}{dt}\right),$$

oder, indem wir V durch $\frac{dX}{dt} : S$ ersetzen:

$$- P \delta x \sqrt{\left(\frac{1}{2} n \varrho \mu\right)} \left(\frac{dX}{dt} + \frac{1}{n} \frac{d^2 X}{dt^2}\right) : S \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Die Bewegungsgleichung für diese Periode ist demnach:

$$\varrho\,\delta x\,\frac{d^2X}{dt^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\,n\,\varrho\,\mu\right)}\,\frac{P\,\delta x}{S}\left(\frac{dX}{dt}+\frac{1}{n}\,\frac{d^2X}{dt^2}\right)$$
$$=a^2\,\varrho\,\delta x\,\frac{d^2X}{dx^2},$$

oder:

$$\frac{d^2X}{dt^2}\left\{1+\frac{P}{S}\sqrt{\left(\frac{\mu}{2\,n\,\varrho}\right)}\right\}+\frac{P}{S}\sqrt{\left(\frac{n\,\mu}{\varrho}\right)}\,\frac{dX}{dt}$$
$$=a^2\,\frac{d^2X}{dx^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10).$$

Die Geschwindigkeit des Schalles ist annähernd:

$$a\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{P}{S}\sqrt{\left(\frac{\mu}{2\,n\,\varrho}\right)}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(11),$$

oder für eine kreisförmige Röhre vom Radius r:

$$a\left\{1-\frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{\mu}{2\,n\,\varrho}\right)}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(12).$$

Das in (12) ausgedrückte Resultat wurde zuerst von Helmholtz erhalten. Eine ausführliche Untersuchung dieses Problemes wurde auch von Kirchhoff[1]) gegeben, welcher in seine Berechnung nicht allein die Wirkung von Reibung, sondern auch die der Wärmeleitung einschloss. Kirchhoff's Resultat hat dieselbe Form wie (12), nur ist $\sqrt{(\mu\,\varrho^{-1})}$ ersetzt durch die (γ genannte) Grösse:

$$\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)}+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sqrt{\nu}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(13),$$

worin b den Newton'schen Werth der Schallgeschwindigkeit und ν einen Leitungscoefficienten bedeutet, welcher nach der kinetischen Gastheorie gleich $\frac{5}{2}\,\mu\,\varrho^{-1}$ ist.

Die Abnahme der Schallgeschwindigkeit in engen Röhren, wie dieselbe durch die Wellenlänge von stationären Schwingungen angezeigt wird, wurde von Kundt (§. 260) beobachtet und ist specieller von Schneebeli[2]) und A. Seebeck[3])

[1]) Pogg. Ann. t. CXXXIV, 177. 1868.
[2]) Pogg. Ann. t. CXXXVI, 296. 1869.
[3]) Pogg. Ann. t. CXXXIX, 104. 1870.

untersucht. Es ergiebt sich, dass die Abnahme der Geschwindigkeit in Uebereinstimmung mit (12) proportional r^{-1} ist; wenn n variirt, wird sie aber eher mit $n^{-3/2}$ als mit $n^{-1/2}$ proportional. Da μ von der Dichte (ϱ) unabhängig ist, so wird die Wirkung in verdünnten Gasen vergrössert.

348. Im Verlaufe dieses Werkes haben wir häufig Gelegenheit gehabt, die Wichtigkeit der Schlussfolgerungen hervorzuheben, zu denen man mittelst der Methode der Dimensionen kommen kann. Jetzt, wo wir in der Lage sind, aus einer grösseren Mannigfaltigkeit von akustischen Erscheinungen, welche sich auf die Schwingungen sowohl fester Körper wie von Fluidis beziehen, Illustrationen hierzu heranzuziehen, wird es zweckmässig sein, diesen Punkt zu recapituliren und etwas mehr im Detail die Principien zu entwickeln, auf welchen die Methode beruht.

Bei Systemen, wie Glocken oder Stimmgabeln, welche aus gleichförmigem isotropen Material geformt sind und kraft ihrer Elasticität schwingen, sind die auftretenden akustischen Elemente: die Gestalt, die lineare Dimension c, die Constanten der Elasticität q und μ (§. 149) und die Dichte ϱ. Daher ändert sich nach der Methode der Dimensionen caeteris paribus die Schwingungsdauer proportional der linearen Dimension, wenigstens wenn die Amplituden der Schwingung in demselben Verhältnisse stehen; wird das Gesetz des Isochronismus angenommen, so kann man noch die letztgenannte Einschränkung fallen lassen. In der That haben wir, da die Dimensionen von q und ϱ sind resp. $[ML^{-1}T^{-2}]$ und $[ML^{-3}]$, während μ eine reine Zahl ist, als einzige Combination, welche im Stande ist, eine Zeit darzustellen, $q^{-1/2} . \varrho^{-1/2} . c$.

Das Argument, welches dieser mathematischen Abkürzung der Rechnung zu Grunde liegt, ist folgender Art. Denken wir uns, dass zwei geometrisch ähnliche Körper, deren mechanische Constitution in entsprechenden Punkten dieselbe ist, ähnliche Bewegungen in einer solchen Weise ausführen, dass

die entsprechenden Aenderungen Zeiten[1]) in Anspruch nehmen, welche den linearen Dimensionen proportional sind in dem Verhältnisse, etwa von $1:n$. Dann ist, wenn die eine Bewegung als Folge von elastischen Kräften möglich ist, dasselbe mit der anderen der Fall. Denn die zu bewegenden Massen verhalten sich wie $1 : n^3$, die Beschleunigungen wie $1 : n^{-1}$ und daher die nöthigen Kräfte wie $1 : n^2$; da die Deformationen dieselben sind, so ist dieses letztere Verhältniss thatsächlich das Verhältniss der elastischen Kräfte, welche von den Deformationen herrühren, wenn jene auf entsprechende Flächen bezogen werden. Sind die elastischen Kräfte im Stande, in dem ersten Falle die angenommene Bewegung hervorzurufen, so sind dieselben auch im Stande, die angenommene Bewegung in dem zweiten Falle zu erzeugen.

Die dynamische Aehnlichkeit wird durch die Einwirkung einer Kraft gleich der Schwerkraft gestört, welche den Cuben und nicht den Quadraten der entsprechenden Linien proportional ist; in Fällen aber, wo die Schwerkraft die alleinige bewegende Kraft ist, kann die dynamische Aehnlichkeit durch eine verschiedene Beziehung zwischen entsprechenden Räumen und entsprechenden Zeiten gesichert werden. So sind, wenn das Verhältniss der entsprechenden Räume ist $1 : n$, und das der entsprechenden Zeiten $1 : n^{1/2}$, die Beschleunigungen in beiden Fällen dieselben und können die Wirkungen von Kräften sein, welche in dem Verhältnisse $1 : n^3$ auf Massen wirken, die dasselbe Verhältniss zu einander haben. Als Beispiele, welche unter diesen Gesichtspunkt fallen, möge das gewöhnliche Pendel, Seewellen, deren Geschwindigkeit sich wie die Quadratwurzel der Wellenlänge ändert, und die ganze Theorie der Vergleichung von Schiffen und ihren Modellen erwähnt werden, durch welche Herr Froude das Verhalten von Schiffen

---

[1]) Die Auffassung einer Aenderung des Maassstabes für den Raum ist uns durch den allgemeinen Gebrauch von Zeichnungen und Modellen vertraut gemacht worden, die entsprechende Auffassung für die Zeit ist oft weniger klar. Der Vorstellungskraft des Lesers wird der Gedanke an den Fall eines in verschiedenen Tempis ausgeführten Musikstückes zu Hülfe kommen.

aus Versuchen vorhersagt, die mit Modellen von mässigen Dimensionen angestellt werden.

Dieselbe Vergleichung, welche wir oben für elastische feste Körper gemacht haben, lässt sich auch auf Luftschwingungen anwenden. Die Drucke in den zu vergleichenden Fällen sind dieselben und geben daher, wenn sie auf Flächen in dem Verhältnisse $1 : n^2$ wirken, Kräfte in demselben Verhältnisse. Diese Kräfte wirken auf Massen in dem Verhältnisse $1 : n^3$ und rufen daher Beschleunigungen in dem Verhältnisse $1 : n^{-1}$ hervor, welches das Verhältniss der thatsächlichen Beschleunigungen ist, wenn sowohl Raum wie Zeit in dem Vehältnisse $1 : n$ stehen. Demgemäss verhalten sich die Schwingungsdauern von ähnlichen resonirenden Hohlräumen, welche mit demselben Gase gefüllt sind, direct wie die linearen Dimensionen — ein sehr wichtiges zuerst von Savart ausgesprochenes Gesetz.

Da dieselbe Vergleichungsmethode sich sowohl auf elastische feste Körper wie auf elastische Fluida anwenden lässt, so kann auch eine Ausdehnung derselben auf Systeme gemacht werden, in welche beide Arten von Schwingungen eintreten. Z. B. kann man annehmen, dass die Grössenverhältnisse eines Systemes, welches aus einer Stimmgabel und einem Luftresonator besteht, geändert werden ohne eine andere Aenderung in der Bewegung als die, welche darin liegt, dass man die Zeiten in demselben Verhältnisse wie die linearen Dimensionen nimmt.

Bis dahin setzten wir voraus, dass die Aenderung des Grössenverhältnisses nach allen Richtungen gleichmässig geschieht. Es giebt aber auch Fälle, die nicht unter diesen Gesichtspunkt fallen, auf welche das Princip der dynamischen Aehnlichkeit ebenfalls mit grossem Nutzen angewandt werden kann. Wir wollen z. B. die Biegungsschwingungen eines Systemes betrachten, das aus einer dünnen elastischen Lamelle, eben oder gekrümmt, zusammengesetzt ist. Nach §§. 214, 215 sehen wir, dass die Drucke b der Lamelle und die mechanischen Constanten q und ϱ nur in den Combinationen $q b^3$ und $b \varrho$ auftreten werden, und daher lässt sich eine Vergleichung an-

stellen, selbst wenn die Aenderung der Dicke nicht in demselben Verhältnisse wie für die anderen Dimensionen geschieht. Bezeichnet c die lineare Dimension, wenn die Dicke vernachlässigt wird, so müssen sich die Zeiten caeteris paribus wie $q^{-1/2} . \varrho^{1/2} . c^2 . b^{-1}$ ändern. Für ein gegebenes Material, gegebene Dicke und Gestalt verhalten sich daher die Zeiten wie die Quadrate der linearen Dimension. Man muss indessen nicht vergessen, dass Resultate wie diese, welche ein Gesetz enthalten, das nur annähernd richtig ist, auf einem anderen Standpunkte stehen, wie die mehr unmittelbaren Folgen des Principes der Aehnlichkeit.

ZUSATZ A.

(§. 307.)

Das Problem der Bestimmung der Correction für das offene Ende einer Pfeife ist ein sehr schwieriges, selbst wenn ein unendlicher seitlicher Rand vorhanden ist. Im Texte (§. 307) wurde bewiesen, dass die Correction α grösser wie $\frac{1}{4}\pi R$ ist und kleiner wie $\frac{8}{3\pi} R$. Den letzteren Werth erhielten wir, indem die Energie der Bewegung unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeit parallel der Axe auf der Ebene des Mundes constant sei, berechnet, und dann diese Energie mit dem Quadrate des Gesammtstromes verglichen wurde. Die wirkliche Geschwindigkeit nimmt zweifelsohne von dem Mittelpunkte nach aussen zu, indem sie an der scharfen Kante unendlich wird; die Annahme eines constanten Werthes ist eine etwas gewaltsame. Nichtsdestoweniger stellt sich der so berechnete Werth von α der Art, dass er nicht viel grösser wie der richtige ist. Es ist klar, dass wir Grund dazu haben, ein sehr gutes Resultat zu erhalten, wenn wir zunächst eine axiale Geschwindigkeit von folgender Form annehmen:

$$1 + \mu \frac{r^2}{R^2} + \mu' \frac{r^4}{R^4},$$

— wo r den Abstand des betrachteten Punktes von dem Mittelpunkte des Mundes bedeutet —, und dann μ und μ' so bestimmen, dass dadurch die ganze Energie ein Minimum wird. Die so berechnete Energie muss, wenn sie auch nothwendigerweise zu gross ist, eine sehr gute Annäherung an die Wirklichkeit geben.

Bei Verfolgung dieses Planes haben wir mit zwei verschiedenen Problemen zu thun, der Bestimmung der Bewegung (1) ausserhalb und (2) innerhalb des Cylinders. Das erstere, als das leichtere, wollen wir zuerst durchnehmen.

Die Bedingungen sind die, dass φ im Unendlichen verschwindet, und dass für $x = 0$, $\frac{d\varphi}{dx}$ verschwindet, ausgenommen auf der Fläche des Kreises $r = R$, wo:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 + \mu \frac{r^2}{R^2} + \mu' \frac{r^4}{R^4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Unter diesen Umständen wissen wir (§. 278), dass:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int\int \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\sigma}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

worin ϱ die Entfernung des Punktes, in welchem φ bestimmt werden soll, von dem Flächenelemente $d\sigma$ bedeutet. Nun ist:

$$2 \text{ (kinetische Energie)}^{1)} = -\frac{1}{2} \int\int \varphi \frac{d\varphi}{dx} d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\int \frac{d\varphi}{dx} \cdot \int\int \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\sigma}{\varrho} \cdot d\sigma = \frac{P}{\pi},$$

wenn P das Potential einer Scheibe vom Radius R auf sich selbst darstellt, deren Dichtigkeit ist:

$$= 1 + \mu \frac{r^2}{R^2} + \mu' \frac{r^4}{R^4}.$$

Der Werth von P ist nach der in dem Texte (§. 307) für eine gleichförmige Dichte benutzten Methode zu berechnen. An der Kante der Scheibe, wenn dieselbe beim Radius a abgeschnitten ist, haben wir das Potential:

$$V = 4a + \frac{20}{9} \frac{\mu a^3}{R^2} + \frac{356}{225} \frac{\mu' a^5}{R^4} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

und somit:

$$P = \int_0^R 2\pi a\, da\, V \left\{1 + \mu \frac{a^2}{R^2} + \mu' \frac{a^4}{R^4}\right\}$$

$$= \frac{8\pi R^3}{3} \left\{1 + \frac{14}{15}\mu + \frac{5}{21}\mu^2 + \frac{314}{525}\mu' \right.$$

$$\left. + \frac{214}{675}\mu\mu' + \frac{89}{825}\mu'^2\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

---

1) Die Dichtigkeit des Fluidums ist gleich Eins angenommen.

nach Ausführung der Integration. Diese Grösse giebt dividirt durch π das Doppelte der kinetischen Energie der durch (1) definirten Bewegung.

Der Gesammtstrom ist:

$$= \int_0^R 2\pi r\, dr \left(1 + \mu \frac{r^2}{R^2} + \mu' \frac{r^4}{R^4}\right)$$

$$= \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wir haben nun zunächst das Problem zu betrachten, die Bewegung eines incompressiblen Fluidums innerhalb eines starren Cylinders zu bestimmen unter den Bedingungen, dass die axiale Geschwindigkeit für $x = -\infty$ gleichförmig und für $x = 0$ von der Form:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 + \mu \frac{r^2}{R^2} + \mu' \frac{r^4}{R^4}$$

sein soll. Es wird zu grösserer Klarheit führen, wenn wir von φ denjenigen Theil absondern, welcher einem gleichförmigen Strom entspricht. So wird, wenn wir:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu' + \frac{d\psi}{dx}$$

setzen, ψ einer Bewegung entsprechen, welche verschwindet, wenn x numerisch gross ist. Für $x = 0$ haben wir:

$$\frac{d\psi}{dx} = \mu\left(r^2 - \frac{1}{2}\right) + \mu'\left(r^4 - \frac{1}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

wenn zur Abkürzung $R = 1$ gesetzt wird.

Nun lässt sich ψ in folgende Reihe entwickeln:

$$\psi = \Sigma a_p\, e^{px} J_0(pr) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

worin p eine Wurzel der Gleichung:

$$J_0'(p) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)^{1)}$$

bedeutet. Jedes Glied dieser Reihe erfüllt die Bedingung, für $r = 1$ keine radiale Geschwindigkeit zu geben, und für

---

[1]) Die numerischen Werthe der Wurzeln sind angenähert:

$p_1 = 3{,}831705$, $p_2 = 7{,}015$, $p_3 = 10{,}174$,
$p_4 = 13{,}324$, $p_5 = 16{,}471$, $p_6 = 19{,}616$.

$x = -\infty$ keine Bewegung irgend welcher Art. Es bleibt noch übrig, die Coefficienten a_p so zu bestimmen, dass dieselben für $x = 0$ der Gleichung (6) genügen. Von $r = 0$ bis $r = 1$ müssen wir haben:

$$\Sigma p a_p J_0(pr) = \mu\left(r^2 - \frac{1}{2}\right) + \mu'\left(r^4 - \frac{1}{3}\right),$$

woraus wir nach Multiplication mit $J_0(pr)\,dr$ und Integration von 0 bis 1 erhalten:

$$p a_p [J_0(p)]^2 = 2\int_0^1 r\,dr\,J_0(pr)\left\{\mu\left(r^2 - \frac{1}{2}\right) + \mu'\left(r^4 - \frac{1}{3}\right)\right\};$$

da jedes Glied auf der Linken, mit Ausnahme eines einzigen, nach der diesen Functionen zukommenden Eigenschaft verschwindet. Für die rechte Seite haben wir:

$$\int_0^1 r\,dr\,J_0(pr) = 0,$$

$$\int_0^1 r^3\,dr\,J_0(pr) = \frac{2}{p^2} J_0(p),$$

$$\int_0^1 r^5\,dr\,J_0(pr) = \left(\frac{4}{p^2} - \frac{32}{p^4}\right) J_0(p),$$

so dass:

$$a_p = \frac{4}{p^3 J_0(p)}\left\{\mu + 2\mu'\left(1 - \frac{8}{p^2}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Das Geschwindigkeitspotential φ der ganzen Bewegung lautet daher:

$$\varphi = \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right)x$$

$$+ 4\Sigma\frac{\mu + 2\mu'(1 - 8p^{-2})}{p^3 J_0(p)} e^{px} J_0(pr) \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wobei sich die Summation über alle zulässigen Werthe von p erstreckt. Wir haben nun die Energie der Bewegung eines so grossen Theiles von Fluidum zu suchen, als zwischen $x = 0$ und $x = -l$ eingeschlossen ist, wo l so gross gewählt wird, dass die Geschwindigkeit dort merklich constant bleibt.

Nach dem Green'schen Satze ist:

$$2\,(\text{kinetische Energie}) = \int_0^1 \varphi \frac{d\varphi}{dx}\, 2\pi r\, dr\ (x = 0)$$

$$-\int_0^1 \varphi \frac{d\varphi}{dx}\, 2\pi r\, dr \quad (x = -l).$$

Nun ist für $x = -l$:

$$\varphi = -\left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right) l,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu',$$

so dass das zweite Glied wird $\pi l \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right)^2$.

Bei der Berechnung des ersten Gliedes müssen wir daran denken, dass, wenn p_1 und p_2 zwei verschiedene Werthe von p sind, folgende Gleichung gilt:

$$\int_0^1 2\pi r\, dr\, J_0(p_1 r)\, J_0(p_2 r) = 0.$$

Somit:

$$\int_0^1 2\pi r\, dr\, \varphi \frac{d\varphi}{dx}\ (x = 0)$$

$$= 16\,\Sigma \frac{\{\mu + 2\mu'(1 - 8p^{-2})\}^2}{p^5 [J_0(p)]^2} \int_0^1 2\pi r\, dr\, [J_0(pr)]^2$$

$$= 16\pi\Sigma \left\{\mu + 2\mu'\left(1 - \frac{8}{p^2}\right)\right\}^2 p^{-5}.$$

Demgemäss ist nach Wiedereinführung von R:

$$2\,(\text{kinetische Energie}) = \pi R^2 l \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right)^2$$

$$+ 16\pi R^3 \Sigma \left\{\mu + 2\mu'\left(1 - \frac{8}{p^2}\right)\right\}^2 p^{-5}.$$

Hierzu muss die Energie der Bewegung auf der positiven Seite von $x = 0$ hinzuaddirt werden. Im Ganzen ist:

$$\frac{2 \text{ kinetische Energie}}{(\text{Strom})^2} = \frac{l}{\pi R^2}$$

$$+ \frac{16}{\pi R\left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right)^2} \Sigma \left\{\mu + 2\mu'\left(1 - \frac{8}{p^2}\right)\right\}^2 p^{-5}$$

$$+ \frac{8}{3\pi^2 R} \frac{1 + \frac{14}{15}\mu + \frac{5}{21}\mu^2 + \frac{314}{525}\mu' + \frac{214}{675}\mu\mu' + \frac{89}{825}\mu'^2}{\left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right)^2}.$$

Bedeutet daher α die an der Länge anzubringende Correction, so ist:

$$\frac{3\pi\alpha}{8R} = \Big[1 + \frac{14}{15}\mu + \frac{314}{525}\mu' + \left(6\pi\Sigma p^{-5} + \frac{5}{21}\right)\mu^2$$

$$+ \left\{24\pi(\Sigma p^{-5} - 8\Sigma p^{-7}) + \frac{214}{675}\right\}\mu\mu'$$

$$+ \left\{24\pi(\Sigma p^{-5} - 16\Sigma p^{-7} + 64\Sigma p^{-9}) + \frac{89}{825}\right\}\mu'^2\Big]$$

$$: \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right)^2.$$

Durch numerische Berechnung aus den Werthen von p folgt:

$$\Sigma p^{-5} = 0{,}00128266; \quad \Sigma p^{-5} - 8\Sigma p^{-7} = 0{,}00061255,$$

$$\Sigma p^{-5} - 16\Sigma p^{-7} + 64\Sigma p^{-9} = 0{,}00030351,$$

und daher:

$$\frac{3\pi\alpha}{8R} = [1 + 0{,}9333333\mu + 0{,}5980951\mu'$$

$$+ 0{,}2622728\mu^2 + 0{,}363223\mu\mu' + 0{,}1307634\mu'^2]$$

$$: \left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right)^2$$

$$= 1 - \frac{0{,}0666667\mu + 0{,}0685716\mu' - 0{,}0122728\mu^2 - 0{,}029890\mu\mu' - 0{,}0196523\mu'^2}{\left(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\mu'\right)^2} \quad \ldots (11).$$

Der Bruch auf der rechten Seite ist das Verhältniss zweier quadratischen Functionen von μ und μ'; unsere Aufgabe besteht darin, seinen Maximalwerth zu bestimmen. Allgemein werden, wenn S und S' zwei quadratische Functionen sind, die

Maximal- und Minimalwerthe von $z = S : S'$ gegeben durch folgende cubische Gleichung:

$$-\Delta z^{-3} + \Theta z^{-2} - \Theta' z^{-1} + \Delta' = 0,$$

wo:

$$S = a\mu^2 + b\mu'^2 + c + 2f\mu' + 2g\mu + 2h\mu\mu',$$
$$S' = a'\mu^2 + b'\mu'^2 + c' + 2f'\mu' + 2g'\mu + 2h'\mu\mu',$$
$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$
$$= \frac{(h^2 - ab)(g^2 - ac) - (hg - af)^2}{a},$$
$$\Theta = (bc - f^2)\,a' + (ca - g^2)\,b' + (ab - h^2)\,c'$$
$$+ 2(gh - af)\,f' + 2(hf - bg)\,g' + 2(fg - ch)\,h';$$

Θ' und Δ' werden aus Θ und Δ durch Verwechslung der accentuirten und nicht accentuirten Buchstaben erhalten.

In dem vorliegenden Falle wird, da S' ein Product von linearen Factoren ist, $\Delta' = 0$ und auch, da die beiden Factoren dieselben sind, $\Theta' = 0$, so dass einfach $z = \Delta : \Theta$. Setzen wir die numerischen Werthe ein und führen die Rechnung aus, so ergiebt sich $z = 0{,}0289864$, welches der Maximalwerth des Bruches ist, welcher sich mit reellen Werthen von μ und μ' verträgt.

Der entsprechende Werth von α ist $0{,}82422\,R$; grösser als dieser kann die wahre Correction nicht sein.

Nehmen wir $\mu' = 0$ an, so ist der dann mögliche grösste Werth von z gleich 0,024363, welches giebt:

$$\alpha = 0{,}828146\,R\text{ [1]}.$$

Setzen wir andererseits $\mu = 0$, so ergiebt sich 0,027653 für den Maximalwerth von z, woraus:

$$\alpha = 0{,}825353\,R.$$

Es geht aus diesem Resultate hervor, dass der veränderliche Theil der Normalgeschwindigkeit an der Mundöffnung besser durch ein Glied dargestellt wird, welches sich wie r^4, als durch eines, welches sich wie r^2 ändert.

Der Werth $\alpha = 0{,}8242\,R$ kommt wahrscheinlich der Wahrheit ziemlich nahe. Wird die Normalgeschwindigkeit als constant angenommen, so ist $\alpha = 0{,}848846\,R$; ist jene von der Form

[1]) Notes on Bessel's functions. Phil. Mag. Nov. 1872.

$1 + \mu r^2$, so ist $\alpha = 0{,}82815\, R$, wenn μ passend bestimmt wird; wird die Form $1 + \mu r^2 + \mu' r^4$, welche noch eine zweite willkürliche Constante enthält, der Berechnung zu Grunde gelegt, so erhalten wir $\alpha = 0{,}8242\, R$.

Der wahre Werth von α ist wahrscheinlich etwa $0{,}82\, R$.

Für $\mu = 0$ entspricht die Minimalenergie dem Werthe $\mu' = 1{,}103$, so dass:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 + 1{,}103\, \frac{r^4}{R^4}.$$

Bei dieser Voraussetzung würde die Normalgeschwindigkeit an der Kante $(r = R)$ etwa das Doppelte von der nahe dem Mittelpunkte sein.

Note zu §. 273.

Eine von Liouville[1]) gegebene Methode, Poisson's Lösung (8) zu erhalten, ist erwähnenswerth.

Ist r der Polar-Radiusvector, gemessen von irgend einem Punkte O an, und wird die allgemeine Differentialgleichung über das zwischen den kugelförmigen Flächen r und $r + dr$ liegende Volumen integrirt, so finden wir durch die Transformation des zweiten Integrals nach dem Green'schen Satze:

$$\frac{d^2(r\lambda)}{dt^2} = a^2\, \frac{d^2(r\lambda)}{dr^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha),$$

worin $\lambda = \int \varphi\, d\sigma$ ist, d. h. proportional dem Mittelwerthe der auf der kugelförmigen Fläche vom Radius r gerechneten Grösse φ ist. Gleichung (α) kann als eine Ausdehnung von (1) §. 279 angesehen werden; sie lässt sich auch aus dem Ausdrucke (5) §. 241 für $\nabla^2\varphi$ in Werthen der gewöhnlichen Polarcoordinaten r, ϑ, ω beweisen.

Die allgemeine Lösung von (α) lautet:

$$r\lambda = \chi(at + r) + \vartheta(at - r) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta),$$

worin χ und ϑ willkürliche Functionen sind; aber es ist, wie in

[1]) Liouville, tom. I, p. 1. 1856.

§. 279, wenn im Pole keine Quelle liegt, $\chi(at) + \vartheta(at) = 0$, so dass:

$$r\lambda = \chi(at + r) - \chi(at - r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma).$$

Aus (γ) geht hervor, dass in O, für $r = 0$, $\lambda = 2\chi'(at)$ wird, welches demnach auch der Werth von $4\pi\varphi$ in O zur Zeit t ist. Weiter folgt aus (γ):

$$2\chi'(at + r) = \frac{d(r\lambda)}{d(at)} + \frac{d(r\lambda)}{dr},$$

so dass:

$$2\chi'(r) = \left[\frac{d(r\lambda)}{d(at)} + \frac{d(r\lambda)}{dr}\right]_{(t=0)},$$

oder in der Benennungsweise des §. 273:

$$2\chi'(r) = \frac{r}{a}\int\!\!\int F(r)\,d\sigma + \frac{d}{dr}\left[r\int\!\!\int f(r)\,d\sigma\right] \quad . \quad . \quad . \quad (\delta).$$

Schreiben wir in (δ) at an Stelle von r, so erhalten wir den Werth von $2\chi'(at)$ oder $4\pi\varphi$, welcher mit (8) §. 273 übereinstimmt.

Note über fortschreitende Wellen. Aus den Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. IX, Nr. 125.

Es ist oft bemerkt worden, dass, wenn eine Gruppe von Wellen in ruhigem Wasser forteilt, die Geschwindigkeit der Gruppe kleiner ist, wie die der Einzelwellen, aus welchen jene besteht. Die Wellen scheinen sich durch die Gruppe hindurch vorwärts zu bewegen, indem sie bei Annäherung an ihre vordere Grenze abnehmen. Diese Erscheinung wurde, wie ich glaube, zuerst von Stokes erklärt, welcher die Gruppe aus der Uebereinanderlagerung von zwei unendlichen Wellenzügen gebildet ansah, die gleiche Amplituden und nahezu gleiche Wellenlängen hätten und in derselben Richtung voreilten. Vor etwa zwei Jahren wurde meine Aufmerksamkeit durch Herrn Froude auf dieses Problem gelenkt, und ich kam dann unabhängig auf dieselbe Erklärung [1]). In meinem Buche „Theorie

[1]) Eine andere Erscheinung, welche mir ebenfalls von Herrn Froude mitgetheilt wurde, lässt eine ähnliche Erklärung zu. Ein Dampfboot,

des Schalles" (§. 191) habe ich die Frage allgemeiner behandelt und habe gezeigt, dass, wenn V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für irgend eine Art von Wellenlängen ist, deren Wellenlänge λ beträgt, und $\varkappa = 2\pi\lambda^{-1}$ ist, dass dann U, die Geschwindigkeit einer Gruppe, welche aus einer grossen Zahl von Wellen zusammengesetzt wird und sich in einen ungestörten Theil des Mediums hinüberbewegt, ausgedrückt wird durch:

$$U = \frac{d(\varkappa V)}{d\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

oder, wie wir auch schreiben können:

$$U : V = 1 + \frac{d \log V}{d \log \varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Daher haben wir für $V \propto \lambda^n$:

$$U = (1 - n) V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Thatsächlich wird, wenn zwei unendliche Wellenzüge durch $\cos \varkappa (Vt - x)$ und $\cos \varkappa' (V't - x)$ ausgedrückt werden, ihre Resultante dargestellt durch:

$$\cos \varkappa (Vt - x) + \cos \varkappa' (V't - x),$$

welches gleich ist:

$$2 \cos \left\{ \frac{\varkappa' V' - \varkappa V}{2} t - \frac{\varkappa' - \varkappa}{2} x \right\} . \cos \left\{ \frac{\varkappa' V' + \varkappa V}{2} t - \frac{\varkappa' + \varkappa}{2} x \right\}.$$

---

welches sich rasch durch Wellen bewegt, wird von einem eigenthümlichen System divergirender Wellen begleitet, deren auffallendster Zug die Neigung derjenigen Linie, welche die grössten Elevationen von aufeinanderfolgenden Wellen enthält, zu den Wellenstirnen ist. Diese Wellenform lässt sich durch die Uebereinanderlagerung von zwei (oder mehreren) unendlichen Wellenzügen erklären, die nur um Weniges von einander abweichende Wellenlängen haben, und deren Richtungen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in jedem Falle in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass keine Aenderung in der relativen Stellung zum Boote eintritt. Die Art der Zusammensetzung der Wellen wird man am besten verstehen, wenn man auf einem Papiere zwei Sätze von parallelen und gleich weit von einander entfernten Linien zieht, welche die obige Bedingung erfüllen, zur Darstellung der Kämme der einzelnen Wellenzüge. Bei zwei Wellenzügen, deren Wellenlängen wenig von einander abweichen, lässt es sich beweisen, dass die Tangente des Winkels zwischen der Linie der Maxima und den Wellenfronten die Hälfte der Tangente des Winkels zwischen den Wellenfronten und dem Curse des Bootes ist.

Wenn $\varkappa' - \varkappa$ und $V' - V$ klein sind, so haben wir einen Zug von Wellen, deren Amplituden sich von einem Punkte zum anderen langsam zwischen den Grenzen 0 und 2 ändern, indem sie dabei eine Reihe von Gruppen bilden, die von einander durch Regionen getrennt werden, welche vergleichsweise frei von Störung sind. Die Lage der Mitte derjenigen Gruppe, welche im Anfange im Ursprunge lag, wird zur Zeit t gegeben durch:

$$(\varkappa' V' - \varkappa V)\, t - (\varkappa' - \varkappa)\, x = 0,$$

welches zeigt, dass die Geschwindigkeit der Gruppe $(\varkappa' V' - \varkappa V) : (\varkappa' - \varkappa)$ beträgt. An der Grenze, wenn die Anzahl der Wellen in jeder Gruppe unendlich gross ist, fällt dieses Resultat mit (1) zusammen.

Die folgenden speciellen Fälle sind erwähnenswerth und sind hier zum Zwecke der Vergleichung zusammengestellt:

$V \propto \lambda$, $U = 0$, Reynolds' unabhängige Pendel [1]).

$V \propto \lambda^{1/2}$, $U = \frac{1}{2} V$ {Wellen im tiefen Wasser unter Wirkung der Schwerkraft.

$V \propto \lambda^0$, $U = V$, Luftwellen etc.

$V \propto \lambda^{-1/2}$, $U = \frac{3}{2} V$, Capillare Wasserwellen.

$V \propto \lambda^{-1}$, $U = 2V$, Biegungswellen.

Die capillaren Wasserwellen sind diejenigen, deren Wellenlänge so klein ist, dass die von der Capillarität herrührende Restitutionskraft diejenige, welche von der Schwerkraft herrührt, weit übersteigt. Ihre Theorie wurde von Thomson gegeben (Phil. Mag. Nov. 1871). Die Biegungswellen, für welche $U = 2V$ ist, sind diejenigen, welche der Biegung eines elastischen Stabes oder einer elastischen Platte entsprechen („Theorie des Schalles", §. 191).

In einer auf der Versammlung der British Association zu Plymouth gelesenen Arbeit (die später in „Nature", Aug. 23, 1877 gedruckt wurde) gab Prof. Osborne Reynolds eine dynamische Erklärung für die Thatsache, dass eine Gruppe von Tiefseewellen nur mit der Hälfte der Geschwindigkeit der einfallenden Wellen vorwärtseilt. Es ergiebt sich, dass die Energie, welche gegen einen Punkt bewegt wird, wenn ein Zug von Wellen durch letzteren hindurchgeht, nur die Hälfte derjenigen Energie ist, welche nothwendig wird, um diejenigen Wellen, die

[1]) Wegen dieser Pendel wird der Leser auf den nachher erwähnten Aufsatz in der „Nature" Aug. 23, 1877 verwiesen. Anm. des Uebers.

in derselben Zeit hindurchgehen, aufrecht zu erhalten, so dass es, wenn der Zug der Wellen begrenzt ist, unmöglich sein wird, dass ihre Front mit der ganzen Geschwindigkeit der Wellen vorwärtseilt, weil dieses die Erlangung einer grösseren Energie in sich schliessen würde, wie thatsächlich ersetzt werden kann. Prof. Reynolds hat die Fälle nicht betrachtet, wo mehr Energie sich verbreitet als den in der gleichen Zeit hindurchgehenden Wellen entspricht; sein Argument, dasselbe auf die schon gegebenen Resultate in umgekehrter Richtung angewandt, zeigt, dass solche Fälle existiren müssen. Das Verhältniss der fortgeführten Energie zu der der durchgehenden Wellen ist $U : V$; somit beträgt die in der Zeiteinheit fortgeführte Energie $U : V$ von derjenigen, welche auf einer Länge V vorhanden ist oder U mal so viel, wie auf der Längeneinheit existirt. Demgemäss haben wir:

Die in der Zeiteinheit fortgeführte Energie : die in der Längeneinheit enthaltene Energie (im Durchschnitt)

$$= d(\varkappa V) : d\varkappa \text{ nach (1).}$$

Als ein Beispiel will ich den Fall von kleinen rotationslosen Wellen in Wasser von endlicher Tiefe l[1]) nehmen. Wird z nach unten von der Oberfläche gerechnet, und wird die Erhebung (h) der Welle bezeichnet mit:

$$h = H \cos(nt - \varkappa x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

worin $n = \varkappa V$ ist, so lautet das entsprechende Geschwindigkeitspotential (φ):

$$\varphi = - VH \frac{e^{\varkappa(z-l)} + e^{-\varkappa(z-l)}}{e^{\varkappa l} - e^{-\varkappa l}} \sin(nt - \varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Dieser Werth von φ genügt der allgemeinen Differentialgleichung für rotationslose Bewegung ($\nabla^2 \varphi = 0$), macht die verticale Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dz}$ für $z = l$ zu Null und für $z = 0$ zu $-\frac{dh}{dt}$. Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung ist:

$$V^2 = \frac{g}{\varkappa} \frac{e^{\varkappa l} - e^{-\varkappa l}}{e^{\varkappa l} + e^{-\varkappa l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wir können nun die Energie berechnen, welche in einer Länge x enthalten ist, von der angenommen wird, dass sie eine

[1]) Prof. Reynolds betrachtet die trochoidalen Wellen von Rankine und Froude, welche Molecularrotation enthalten.

so grosse Zahl von Wellen einschliesst, dass Bruchtheile ausser Rechnung gelassen werden können.

Für die potentielle Energie haben wir:

$$V_1 = g\varrho \int \int_0^h z\, dz\, dx = \frac{1}{2} g\varrho \int h^2 dx = \frac{1}{4} g\varrho H^2 . x \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int \int \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \right\} dx\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \varrho \int \left(\varphi \frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=0} dx = \frac{1}{4} g\varrho H^2 . x \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

nach (1) und (6). Wenn in Uebereinstimmung mit dem am Ende dieser Arbeit angeführten Beweisgrunde die Gleichheit von V_1 und T angenommen wird, so folgt der Werth für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung aus den vorstehenden Ausdrücken. Die ganze Energie in den Wellen, welche eine Länge x einnehmen, beträgt daher (für jede Einheit der Breite):

$$V_1 + T = \frac{1}{2} g\varrho H^2 . x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wobei H das Maximum der Erhebung ist.

Wir haben nun zunächst die Energie zu berechnen, welche in der Zeit t durch eine Ebene, für welche x einen constanten Werth hat, fortgeführt wird, oder in anderen Worten, die Arbeit (W), welche geleistet werden muss, um die Bewegung der Ebene (betrachtet als eine biegsame Lamelle) gegen die Drucke des Fluidums, welche auf die Front derselben wirken, aufrecht zu halten. Der veränderliche Theil des Druckes (δp) in einer Tiefe (z) wird gegeben durch:

$$\delta p = -\varrho \frac{d\varphi}{dt} = -nVH \frac{e^{\varkappa(z-l)} + e^{-\varkappa(z-l)}}{e^{\varkappa l} - e^{-\varkappa l}} cos(nt - \varkappa x),$$

während für die horizontale Geschwindigkeit gilt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varkappa VH \frac{e^{\varkappa(z-l)} + e^{-\varkappa(z-l)}}{e^{\varkappa l} - e^{-\varkappa l}} cos(nt - \varkappa x),$$

so dass:

$$W = \int \int \delta p \frac{d\varphi}{dx} dz\, dt = \frac{1}{4} g\varrho H^2 . Vt . \left[1 + \frac{4\varkappa l}{e^{2\varkappa l} - e^{-2\varkappa l}}\right] \ldots (10)$$

nach Ausführung der Integration. Aus dem Werthe von V in (6) lässt sich beweisen, dass:

$$\frac{d(\varkappa V)}{d\varkappa} = \frac{1}{2} V \left\{1 + \frac{1}{V^2} \frac{d(\varkappa V^2)}{d\varkappa}\right\} = \frac{1}{2} V \left\{1 + \frac{4\varkappa l}{e^{2\varkappa l} - e^{-2\varkappa l}}\right\};$$

es ist demnach nachgewiesen, dass der Werth von W für eine Zeiteinheit ist:

$$= \frac{d(\varkappa V)}{d\varkappa} \cdot \text{der Energie auf der Längeneinheit.}$$

Als ein Beispiel für die directe Berechnung von U können wir den Fall von Wellen nehmen, welche sich unter dem vereinten Einflusse von Schwerkraft und Cohäsion fortbewegen.

Thomson hat bewiesen, dass:

$$V^2 = \frac{g}{\varkappa} + T'\varkappa \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

worin T' die Cohäsionsspannung ist. Daraus:

$$U = \frac{1}{2} V \left\{1 + \frac{1}{V^2} \frac{d(\varkappa V^2)}{d\varkappa}\right\} = \frac{1}{2} V \frac{g + 3\varkappa^2 T'}{g + \varkappa^2 T'} \quad . \; . \; . \; (12).$$

Für ein kleines $\varkappa$ kann die Oberflächenspannung vernachlässigt werden, und dann ist $U = \frac{1}{2} V$; wenn aber im Gegentheil $\varkappa$ gross ist, so wird $U = \frac{3}{2} V$, wie wir schon angegeben haben. Für $T'\varkappa^2 = g$ wird $U = V$. Dieses entspricht dem von Thomson bestimmten Minimum der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Obgleich das Argument aus der Existenz von interferirenden Gruppen hinreichend zu sein scheint, so ist doch eine unabhängige Untersuchung der Beziehung zwischen der vorhandenen Energie und der fortgeführten Energie wünschenswerth. Einige Zeit lang war ich in Verlegenheit wegen einer Methode, die auf alle Wellenarten anwendbar ist, indem ich im Speciellen nicht einsah, warum die Vergleichung der Energieen die Betrachtung einer Aenderung der Wellenlänge einschliessen sollte. Man kann vielleicht die folgende Untersuchungsweise, bei der der Zuwachs der Wellenlänge imaginär ist, als diesem Bedürfnisse Genüge thuend ansehen.

Wir wollen annehmen, dass der Bewegung eines jeden Theiles des Mediums eine Kraft von sehr kleiner Grösse wider-

steht, die proportional der Masse und der Geschwindigkeit des Theiles ist; die Wirkung dieser Kraft wird die sein, dass die im Ursprunge erzeugten Wellen mit wachsendem x allmälig abnehmen. Die Bewegung, welche in der Abwesenheit von Reibung durch $\cos(nt - \varkappa x)$ dargestellt wird, erscheint unter dem Einflusse von Reibung als $e^{-\mu x}\cos(nt - \varkappa x)$, wo μ ein kleiner positiver Coefficient ist. Genau genommen wird der Werth von $\varkappa$ auch durch die Reibung beeinflusst; indessen ist diese Aenderung von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Reibungskräfte und kann unter den hier angenommenen Umständen vernachlässigt werden. Die Energie der Wellen per Längeneinheit in jedem Stadium der Abnahme ist proportional dem Quadrate der Amplitude, und daher verhält sich die Gesammtenergie auf der positiven Seite des Ursprunges zu der Energie von so viel Wellen in ihrem grössten Werthe, d. i. im Ursprunge, als in der Längeneinheit enthalten sind, wie $\int_0^\infty e^{-2\mu x}dx : 1$, oder wie $(2\mu)^{-1} : 1$. Die in der Zeiteinheit durch den Ursprung gesandte Energie ist dieselbe wie die zerstreute Energie; wenn die Reibungskraft, welche auf das Element mit der Masse m wirkt, gleich hmv ist, worin v die Geschwindigkeit des Elementes bedeutet und h constant ist, so beträgt die in der Zeiteinheit zerstreute Energie $h\Sigma mv^2$ oder $2hT$, wo T die kinetische Energie darstellt. Daher finden wir in Folge der Annahme, wonach die kinetische Energie die Hälfte der ganzen Energie beträgt, dass die in der Zeiteinheit hindurchgehende Energie sich zu der grössten auf der Längeneinheit vorhandenen Energie wie $h : 2\mu$ verhält. Es bleibt noch übrig, den Zusammenhang zwischen h und μ zu finden.

Zu diesem Behufe wird es zweckmässig sein, $\cos(nt - \varkappa x)$ als den reellen Theil von $e^{int}e^{-i\varkappa x}$ anzusehen und zu untersuchen, wie $\varkappa$ durch die Einführung von Reibung beeinflusst wird für den Fall, dass n gegeben ist. Nun wird in den Differentialgleichungen der Bewegung die Wirkung von Reibung dargestellt durch die Einsetzung von $\frac{d^2}{dt^2} + h\frac{d}{dt}$ an Stelle von $\frac{d^2}{dt^2}$, oder, da die ganze Bewegung proportional e^{int} ist, durch Einsetzung von $-n^2 + ihn$ für $-n^2$. Daher entspricht die Einfüh-

rung von Reibung einer Umänderung von n in $n - \frac{1}{2}\, ih$ (wobei das Quadrat von h vernachlässigt ist); demgemäss wird $\varkappa$ in $\varkappa - \frac{1}{2}\, ih\, \frac{d\varkappa}{dn}$ verwandelt. Die Lösung wird also:

$$e^{-\frac{1}{2} h \frac{d\varkappa}{dn} x}\, e^{i(nt - \varkappa x)},$$

oder, nach Wegwerfung des imaginären Theiles:

$$e^{-\frac{1}{2} h \frac{d\varkappa}{dn} x} \cos(nt - \varkappa x),$$

so dass $\mu = \frac{1}{2} h \frac{d\varkappa}{dn}$ und $h : 2\mu = \frac{dn}{d\varkappa}$. Das Verhältniss der in der Zeiteinheit durchgesandten Energie zu der in der Längeneinheit vorhandenen Energie wird daher durch $\frac{dn}{d\varkappa}$ oder $\frac{d(\varkappa V)}{d\varkappa}$ ausgedrückt, was zu beweisen war.

Es ist oft bei speciellen Fällen von progressiven Wellen erwähnt, dass die potentielle und kinetische Energie einander gleich sind. Ich erinnere mich aber keiner allgemeinen Behandlung dieser Frage. Das Theorem ist gewöhnlich nicht richtig für die einzelnen Theile des Mediums [1]), sondern es muss so verstanden werden, dass es sich entweder auf eine ganze Anzahl von Wellenlängen oder auf einen solchen Raum erstreckt, dass die ausserhalb dieses befindlichen Bruchtheile der Wellen ausser Acht gelassen werden können. Als ein Beispiel, welches sehr geeignet ist, eine Einsicht in diese Frage zu geben, will ich den Fall einer gleichmässig gespannten kreisförmigen Membran nehmen („Theorie des Schalles“, §. 200), welche mit einer gegebenen Anzahl von Knotenkreisen und Durchmessern schwingt. Die Fundamentalschwingungsarten sind wegen der Symmetrie nicht ganz bestimmt, denn jeder Durchmesser kann zur Knotenlinie gemacht werden. Um uns von dieser Unbestimmtheit los zu machen, können wir annehmen, dass die Membran ein kleines Gewicht trägt, welches auf derselben irgendwo, mit Ausnahme auf einem Knotenkreise, befestigt ist. Es sind dann zwei bestimmte Fundamentalschwingungsarten vorhanden, von denen die Belastung bei der einen

---

[1]) Luftwellen bilden eine wichtige Ausnahme.

auf einem Knotendurchmesser liegt und daher keine Wirkung hervorruft, und bei der anderen mitten zwischen Knotendurchmessern, wo sie also ein Maximum der Wirkung hervorbringt („Theorie des Schalles“, §. 208). Erfolgen Schwingungen von beiden Arten gleichzeitig, so lassen sich die potentiellen und kinetischen Energieen der ganzen Bewegung durch einfache Addition derjenigen dieser Componenten berechnen. Wir wollen uns nun vorstellen, indem wir uns die Belastung ohne Grenzen abnehmend denken, dass die Schwingungen gleiche Amplitude haben und in der Phase um eine Viertel-Periode abweichen. Das Resultat ist eine progressive Welle, deren potentiellen und kinetischen Energieen die Summe von denen der stationären Wellen ist, aus denen sie zusammengesetzt sind. Für die erste Componente haben wir $V_1 = E \cos^2 nt$, $T_1 = E \sin^2 nt$; und für die zweite Componente $V_2 = E \sin^2 nt$, $T_2 = E \cos^2 nt$, so dass $V_1 + V_2 = T_1 + T_2 = E$, oder die potentielle und die kinetische Energie der fortschreitenden Welle sind einander gleich, indem sie dieselbe wie die ganze Energie von jeder der Componente ist. Die hier angewandte Beweisführung scheint hinreichend allgemein zu sein, wenn es auch ziemlich schwer ist, sie in einer Fassung auszudrücken, welche für alle Arten von Wellen passt.

Berichtigung.

Im ersten Bande, S. 28, Zeile 7 von unten ist statt „Schwingungen" zu setzen „Schallen" und Zeile 5 von unten statt „Ruhe" zu setzen „Stille".



